



KTH Engineering Sciences

Projekt 2: Processorn

Vi betraktar en lite enklare variant av värmeledningsekvationen,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(t, x), \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

För att lösa denna *partiella differentialekvation* (PDE) approximerar man x -derivatorna på precis samma sätt som för randvärdesproblem (RVP). Den approximativa lösningen $u_j(t)$ vid gridpunkt x_j och tid t uppfyller då ODEn

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \frac{u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)}{h^2} + f(t, x_j).$$

Randvärdena hanteras som tidigare genom att byta ut $u_0(t)$ mot α och $u_{n+1}(t)$ mot β i första respektive sista ekvationen. Ekvationerna skrivs om i matrisform på liknande sätt som för RVP. (Notera dock att man inte kan skala om problemet genom att multiplicera båda sidor med h^2 som man ofta gör för RVP.) Det ger

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \text{där} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

och

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} f(t, x_1) + \alpha/h^2 \\ f(t, x_2) \\ \vdots \\ f(t, x_{n-1}) \\ f(t, x_n) + \beta/h^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Andra randvillkor hanteras också som för RVP, tex om $u_x(0) = \gamma$ får vi

$$\frac{u_1(t) - u_0(t)}{h} = \gamma \Rightarrow u_0(t) = u_1(t) - h\gamma \Rightarrow \frac{du_1(t)}{dt} = \frac{-u_1(t) + u_2(t)}{h^2} + f(t, x_1) - \frac{\gamma}{h},$$

vilket bara kommer förändra första raden i A och första elementet i $\mathbf{b}$. Detta ger dock endast första ordnings noggrannhet. Med ensidiga "skeva" approximationer kan man få andra ordningen.