Lab A1

I den här kursen ska vi lära oss att använda de viktigaste numeriska metoderna med hjälp av programmeringsspråket och programmet `MATLAB`. Under datorsalsövningarna förväntas ni arbeta självständigt med matlab i tvåmannagrupper (utom och quiz- wiki-uppgifterna som individuella) och genomföra uppgifterna som ni hittar dels i detta dokument (Lab A-1) och på kurshemsidan (Lab A-2 och Lab B). Laborationsmomentet i kursen består av Lab A1, Lab A2 och Lab B. Om Lab A1 redovisas innan bonusdatum (angivet under *CANVAS* → *Uppgifter* → *"Lab A1"*) får man bonuspoäng till tentamen. Motsvarande gäller för Lab A2.

Planera ert arbete för laborationerna väl i förväg. Ni kommer säkert inte hinna göra alla uppgifter under datorsalsövningarna så planera in självständigt arbete utanför schemalagd tid så att ni kan redovisa under en datorsalsövning.
Redovisning: Redovisning görs lämpligtvis löpande, dvs när ni är färdiga med ett delmoment, och samla godkändunderskrifter av kursens labassar. Ställ er i kön i `http://queue.csc.kth.se` när ni vill redovisa eller har frågor. Skriv "Julia" i kommentarsfältet om ni gör uppgiften i Julia. Lycka till!

0. (redovisas ej)

   (a) Innan ni börjar med labben rekommenderar vi att ni bekantar er med MATLAB:
   - Interaktiva MATLAB-uppgifter för att lära sig syntaxen:
     MATLAB Grader SF1547 VT19 (klickbar länk)
   - MATLAB Onramp som bör ta cirka en timmes arbetstid,

   (b) Läs igenom hela denna laborationsbeskrivning, **framförall quiz-instruktionerna och instruktionerna om wiki-uppgiften i slutet**. Om du väljer att göra wiki-uppgiften, bör den göras parallellt med de andra uppgifterna.

1. **Flyttalsaritmetik.** Kör det här programmet i MATLAB:

   Obs: Det går att använda copy-paste från denna PDF-fil.

```
kv=0:15; fv=[]; gv=[];
for j=1:length(kv)
   z=pi+10^kv(j)
   fv(j)=(z-10^kv(j))-pi;
   gv(j)=z-(10^kv(j)+pi);
end
figure(1); semilogy(kv,abs(fv-gv))
```

   Vad skulle `gv` och `fv` vara i exakt aritmetik? Vad blir `gv` och varför? För vilka värden på k gör vi störst fel? Varför?

2. Det här programmet löser ett linjärt ekvationssystem, mäter beräkningstiden, och beräknar normen av residualvektorn.

```
n=50; A=randn(n,n); b=randn(n,1);
tic();
x=gausselim(A,b);
t=toc()
norm(A*x-b)
```

För att köra programmet måste ni ladda ned en (naiv) implementation av Gauss-eliminering, `gausselim.m` och spara i arbetskatalogen: http://www.math.kth.se/~eliasj/sf1547/gausselim.m

(a) Kör programmet ovan. Jämför det med MATLABs inbyggda metod för linjära ekvationsystem, den s.k. backslashoperatorn: `A\b`, genom att ändra programmet. Vilket program är snabbast och generar en lösning med minst fel?

(b) Fyll i tabellen nedan med beräkningstider. När ni fördubblar n, med vilken faktor förväntas beräkningstiden öka enligt teorin? Stämmer det alltid med teorin? Varför inte?

	`gausselim`	backslash	`inv(A)*b`
$n = 25$			
$n = 50$			
$n = 100$			
$n = 200$			
$n = 400$			
$n = 800$			

Redovisning uppg 1-2

Vid redovisning av dessa uppgifter var redo att svara på frågor om resultaten. När ni redovisar ska ni ha lätt tillgänligt på skärmen eller utskrivet:Figur från uppgift 1 och ifylld tabell för uppgift 2.

Uppgift 1-2 godkänd av assistent (signatur, datum): ____________

3. Vi vill bestämma samtliga rötter till följande ekvation $x - 4\sin 2x - 3 = 0$.

(a) Rita grafen för $y(x) = x - 4\sin 2x - 3$ med kommandot `plot`. Experimentera med olika intervall i x-led och olika tabellsteg så att figuren till slut har med alla nollställen till $y(x)$.

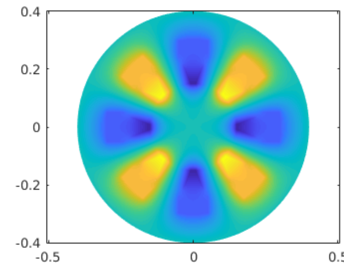
(b) Bestäm den största och den minsta roten till ekvationen $x - 4\sin 2x - 3 = 0$ med Newton-Raphsons metod. Redovisa startgissningar, antal iterationer och resultat för de två rötterna.

(c) Newton-Raphsons metod sägs ha kvadratisk konvergens. Förklara hur man kan avläsa detta ur resultatutskriften.

(d) Är Newton-Raphson idiotsäker eller spårar den ur någon gång? Pröva t.ex. med startvärdet $x_0 = 7$. Förklara beteendet. Motivera med hjälp av en lämplig figur.

(e) Bestäm den största roten med sekantmetoden med $x_0 = 4$ och $x_1 = 5$. Behöver vi fler eller färre steg med sekantmetoden än Newton-Raphsons metod, för att till exempel nå ett fel som är mindre än 10^{-10}. Motivera.

Dokementationen kan du se genom att skriva `help generator` i kommandofönstret.



Uppgift 4 är en förenklad modell magnetiseringen av en generator: https://www.comsol.se/model/generator-in-2d-2122.

4. Ladda ner programmet

`http://www.math.kth.se/~eliasj/generator.m`

och MAT-filen som finns länkad i filen. Programmet beräknar magnetiseringen av en generator. Generatorn har tyvärr blivit skadad, och parametern `theta` bestämmer hur stor skadan är. Företaget som ska använda generatorn tycker det är okej om den maximala magnetiseringen i generatorn (som beräknas som `max(u)` där `u` är utdata från funktionen) håller sig över $1.05 \cdot 10^4 = M$. Se ytterligare dokumentation i `generator.m`.

(a) Bestäm med effektiv metod det värde `theta` ger att den maximala magnetiseringen i hela generatorn är M

(b) Plotta den skadade generatorn. I vilken del verkar den vara mest skadad?

Redovisning uppg 3-4

Uppgift 3-4 godkänd av assistent (signatur, datum): ______________________

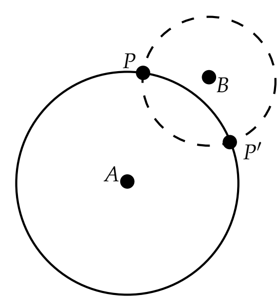
5. Gör Quiz A1 i CANVAS. Denna uppgift är obligatorisk och individuell. Den ska göras självständigt och inte i tvåmannagrupper: https://kth.instructure.com/courses/8065/quizzes

För att rita cirklar i MATLAB kan ni göra såhär:

```
tv=0:0.01:2*pi
a=1; b=3; r=2.2
plot(a+r*cos(tv),b+r*sin(tv))
```

6. Koordinaterna till punkten P skall bestämmas genom att man mäter avstånden till två kända punkter A och B. Se figur till höger (Detta sätt att bestämma en punkts okända koordinater kallas inom geodesin för inbindningsmetoden och är det som satellitnavigeringssystemet GPS utnyttjar.) Då gäller

$$
\begin{aligned}
(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 &= L_A^2 \\
(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 &= L_B^2.
\end{aligned}
$$



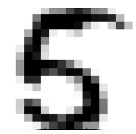
Detta ekvationssystem har två lösningar, då det ju finns två punkter, P och P', som båda ligger på detta avstånd till punkterna A och B. Antag att man vet att de kända punkternas koordinater är $A = (93, 63)$ och $B = (6, 16)$, och de uppmätta avstånden är ungefär $L_A = 55.1$ och $L_B = 46.2$. Ekvationssystemet består av två ekvationer med två obekanta. Lös detta olinjära ekvationssystem med Newtons metod i flera variabler. Hitta båda lösningarna.

Redovisning uppg 6

Uppgift 6 godkänd av assistent (signatur, datum): ______________________

7. **Sifferigenkänning.** Ladda ned filerna `minidigits.mat` och `plotdigit.m` och kör `load minidigits.mat` så att ni får tillgång till data som motsvarar handskrivna siffror. Vi ska klassificera siffrorna som sparas som kolumner i matrisen `testdata`.

När ni laddat filen i MATLAB får ni en matris `testdata` där varje kolumn är en vektor av längd $16^2 = 256$ och motsvarar pixelvärden i en svartvit bild med 16x16 pixlar. Vi kan plotta bilden med funktionen `plotdigit`. Till exempel blir bild nummer 400 med `plotdigit(testadata(:,400))` så här.



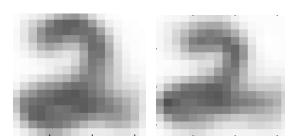
`https://www.math.kth.se/na/SF1547/numd16/minidigits/`

Genom att analysera stora mängder data har vi förberett så kallade centroider som sparas som kolumner i matrisen C. Centroider är bilder som motsvarar i princip ett genomsnitt av många handskrivna siffror, i detta fall för siffran 2. Vi ska nu försöka automatiskt känna igen alla tvåor i vår `testdata`. Eftersom alla centroider i C ser ut som en tvåa, kommer även en summa av centroider se ut som en tvåa. För att testa om en siffra (dvs en kolumn i matrisen testdata) är en tvåa försöker vi hitta den bästa linjärkombinationen av centroider som passar till testdata-vektorn. Kom ihåg att en linjärkombination skrivs som (med $C = [c_1, \ldots, c_k]$)

$$x_1 c_1 + \cdots + x_k c_k.$$

(a) Formulera problemet att hitta den bästa linjärkombinationen (dvs $x_1, \ldots, x_k$) som ett överbestämt linjärt ekvationssystem. Hur många okända variabler har vi? Vad är högerledet? Här krävs ingen programmering.

Såhär ser de första två centroiderna `C(:,1)` och `C(:,2)` ut



(b) Skriv ett program som för varje kolumn i `testdata` beräknar den bästa linjärkombinationen och sedan beräknar hur bra linjärkombinationen passar till testbilden, genom att beräkna `nv(j)=norm(C*x-testdata(:,j))`, dvs normen av residualen av anpassningen.

(c) Ni har nu en vektor `nv` som är ett mått på hur bra linjärkombinationen passar till testsiffran. Om `nv(j)` är litet så borde `testdata(:,j)` se ut som en tvåa. Vi säger nu att om `nv(j)<p` för ett fixerat värde p klassificeras siffran som en tvåa. Välj `p` som medelvärdet mellan `mean(nv)` och `min(nv)`. Den korrekta klassificering av siffran `testdata(:,j)` lagras i `testdatad(j)`. Analysera hur bra er klassificeringsmetod fungerar. Hur många procent av (alla) siffror klassificeras felaktigt som en tvåa? Hur många procent tvåor missar ni?

(För nyfikna: Kan ni hitta ett bättre värde `p`?)

Bakgrund: Bilderna på de handskrivna siffrorna kommer är de så kallade databasen USPS (US Postal Service). En liknande mer känd databas är MNIST: `https://en.wikipedia.org/wiki/MNIST_database`

Redovisning uppg 7

Vid redovisning var redo att förklara:

- Hur ni löst det linjära överbestämda ekvationssystemet.
- Förklara vad ni gjort.
- Procentsatser för hur bra det blev.

Uppgift 7 godkänd av assistent (signatur, datum): ______________________

8. **Wiki-arbete.** Denna uppgift är inte obligatorisk, men kan ge så kallade wiki-bonus. Wiki-bonus ändrar tentabetygsgränsen för betyg A och B. Din träningsgrupp i CANVAS en wiki-sida där ni ska lägga till och svara på uppgifter. Wiki-arbetet är individuellt och du behöver

   - formulera minst 2 uppgifter (per person) i två olika block (block 0-2), och
   - lösa minst 2 uppgifter (per person) från två olika block (block 0-2). Lös inte dina egna uppgifter.

   Dessa redovisas endast elektroniskt. När du genomfört ovan, går du till

   Canvas SF1547 → Uppgifter → Wiki training Lab A1 → Lämna in uppgift

   Här skriver du in vilka uppgiftsnummer på de uppgifter du formulerat och besvarat. Där finner du även information om wiki-bonus deadline.

När laborationsassistenten skriver under "Hela lab godkänd" påminn om att hen ska anteckna era namn/personnummer så att allt kan rapporteras in i systemet. **Glöm ej att skriva erat namn högst upp på detta papper.** Detta papper är eran dokumentation på genomförd lab. Spara det på lämpligt ställe tills ni ser resultatet i rapp.

Hela Lab A1 godkänd av
assistent (signatur, datum): ______________________________