1 SF1547 wiki-work

Urval av uppgifter från wikin. Dessa uppgifter är skapade av elever och lärare i SF1547.

Block 0:

1a-0-6
Vi ska använda funktionen
$f(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4}$
för värden $x = \pi/4 + t$ där t är jättelitet.
a) Det uppstår kancellation. Varför?
b) Härled ett annat sätt att approximera när $t = 1 \cdot 10^{-10}$ med hjälp av Taylorutveckling. Hur stort blir felet? Blir felet större än felet på grund flyttalsaritmetiken?

1a-0-1
Vi använder flyttalsaritmetik för att addera två flyttal x och y i dubbel aritmetik. Ge en övre gräns för relativfelet i resultatet. Antag att man inte får overflow eller underflow. Hint: quiz-fråga 3.

1a-0-4
betrakta funktionen $f(x) = x^2 - 2^{60}$
Skulle newtons metod (implementerad i matlab med dubbelprecisionsflyttal) fungera för att hitta en rot till denna funktion? Om inte, varför? Hur kan man lösa det med numeriska metoder?

1b-0-9*
Man säger att relativfelen adderas approximativt när man multiplicerar. Bevisa detta.

1b-0-11
Låt $f(x) = \frac{(2 \cdot \cos(x+3) - 2)}{e^x \cdot (x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 26) + \pi}$
För vilka x kan det uppstå kancellation? Förklara vad det innebär.

1b-0-12
Din mamma har just löst en nxn-matris med matlab vilket tog 25 sekunder. Hon ska nu lösa en 4nx4n-matris. Hur lång tid förväntas det ta?

2a-0-2
Värdena $\tilde{x} = 1.01$ och $\tilde{y} = 10.1$ är approximationer av de två rötterna av ekvationen
$x^2 - 11x + 10 = 0$
Beräkna absolutfel och relativfel.
Hint: om man vill beräkna absolut-relative/fel måste man veta de exakta rötterna.

2a-0-7*
konvertera det decimala talet 53.75 till en flyttal med mantissa av längd 8

2b-0-7
Examine the following equation:
$y = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}$
Clearly there is a risk of generating a large relative error due to **cancellation**.
Can you rewrite the equation in another form that avoids the risk of cancellation?

1a-0-2
Definiera flyttal.

2a-0-5
Visa att formeln

$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$
är lika med
$\frac{-2x}{1-x^2}$.
Vilken formel är bättre om man vill undvika kancellation? Vilken formel har fler x-värden då kancellation uppstår?

3a-0-9
Hur stort behöver relativfelet i $\tilde{x}$ som approximation av $x = \pi$ vara för att absolutfelet i approximationen av $\sin(x)$ ska bli mindre än 10^{-3} . Använd allmänna felfortplantningsformeln.

3b-0-4
Antag att $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ är approximationer av x och y med absolutfelgränser E_x och E_y . Ge en absolutfelgräns för $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ som approximation av $z = x - y$.

3b-0-8
Under en föreläsning visade det sig fick vi en hackig kurva när vi ville göra polynominterpolation med Vandermondematrisen:

```
tv=[1200.5,1201.5,1202.5,1203,1204,1205]';
yv=[3, 1.5, 1.5, 1,1 ,0]';
clf;
p=plot(tv,yv,'ko');
set(p,'MarkerFaceColor','r');
hold on;
grid on
n=length(tv);
A=[ones(n,1),tv,tv.^2,tv.^3,tv.^4,tv.^5];
c=A\yv;
p=@(x) c(1)+c(2)*x+c(3)*x.^2+c(4)*x.^3+c(5)*x.^4+c(6)*x.^5;
ttv=1200:0.1:1205;
plot(ttv,p(ttv),'k');
```

Visa att man får cancellation när man beräknar p(ttv).

4a-0-4
Antag att $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ är approximationer av x och y med relativfelsgränser R_x och R_y . Ge en

a) absolutfelgräns för $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ som approximation av $z = x - y$.
b) approximativ relativfelgräns för $\tilde{z} = \tilde{x}\tilde{y}$ som approximation av $z = xy$

4a-0-5
På den här sidan är det någon som vill ha hjälp med kancellation http://math.stackexchange.com/questions/1920525/why-is-catastrophic-cancellation-called-so
Det sista inlägget innehåller ett exempel som visar att man kan minska effekten av avrundningsfel i standardformeln för rötterna av $f(x) = x^2 - 1000.001x + 1$.
Varför har författaren valt koefficienten framför x på detta sätt?

1b-0-9*
Man säger att relativfelen adderas approximativt när man multiplicerar. Bevisa detta.

2a-0-2*
Värdena $\tilde{x} = 1.01$ och $\tilde{y} = 10.1$ är approximationer av de två rötterna av ekvationen
$x^2 - 11x + 10 = 0$
Beräkna absolutfel och relativfel.
Hint: om man vill beräkna absolut-relative/fel måste man veta de exakta rötterna.

3a-0-9*
Hur stort behöver relativfelet i $\tilde{x}$ som approximation av $x = \pi$ vara för att absolutfelet i approximationen av $\sin(x)$ ska bli mindre än 10^{-3} .
Använd allmänna felfortplantningsformeln.

3b-0-4
Antag att $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ är approximationer av x och y med absolutfelgränser E_x och E_y . Ge en absolutfelgräns för $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ som approximation av $z = x - y$.

4a-0-4*

Antag att $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ är approximationer av x och y med relativfelsgränser R_x och R_y . Ge en
a) absolutfelgräns för $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ som approximation av $z = x - y$.
b) approximativ relativfelgräns för $\tilde{z} = \tilde{x}\tilde{y}$ som approximation av $z = xy$

4a-0-5*

På den här sidan är det någon som vill ha hjälp med kancellation http://math.stackexchange.com/questions/1920525/why-is-catastrophic-cancellation-called-so
Det sista inlägget innehåller ett exempel som visar att man kan minska effekten av avrundningsfel i standardformeln för rötterna av $f(x) = x^2 - 1000.001x + 1$.
Varför har författaren valt koefficienten framför x på detta sätt?

4b-0-1

Låt oss säga att $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ är approximationer av x och y med absolutfelsgränser E_x och E_y . Ge en absolutfelsgräns för $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$ som approximation av $z = x + y$.

Block 1:

3b-1-3

Newton's metod sägs ha kvadratisk konvergens. Vad innebär det? Formulera det med egna ord.

2a-0-4

Substituera "?" med rätt formler så att foljande kod i matlab är en implementation av sekantmetoden

```
x(1)=-1;   x(2)=-1.1;
for i=?:8
    x(i+1)=x(i)-f(x(i))*?/?;
    error(i)=?;
end
```

1b-1-1

Lös ekvationen
$5 = x^3$
med hjälp av **sekant**metoden genom att iterera **tre** gånger, med startgissningar $x_0 = 1, x_1 =??$.

1b-1-4

Lös ekvationen nedan genom att först beräkna jacobimatrisen och sedan använda Newton's metod
med startgissning x =[1, 2, 3]^T

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3 + 1 = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = x_1x_2^2 - x_1 - 3x_2 + x_2x_3 + 2 = 0 \\ f_3(\mathbf{x}) = x_1x_3^2 - 3x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

1b-1-9

Kalle håller på att studera inför en tentamen i kursen *Algebra och Geometri* och bestämmer sig för att prova lösa uppgiften med MATLAB.
Uppgiften lyder:
2. Klimatstatistiken visar att vintermedeltemperaturen i Stockholms län förändras enligt följande tabell (temperaturen ar avrundat till heltal grader)
Period 0 (1961-1970) 5 ◦C
Period 1 (1971-1980) 2 ◦C
Period 2 (1981-1990) 3 ◦C
Period 3 (1991-2000) 1 ◦C
Period 4 (2001-2010) 1 ◦C
Bestäm en funktion på formen T(k) = Ak + B som stämmer bäst med dessa värden i minstakvadratmening. Här är k nummer av perioden och T(k) ar medeltemperaturen i period k.
För att lösa uppgiften skriver han följande kod:

```
1 -    T = [-5, -2, -3, -1, -1]';
2 -    k = [0, 1, 2, 3, 4; 1, 1, 1, 1, 1]';
3 -    b = k\T
4
```

Vad gör backslash-operatorn (\) i rad 3?
Uppgift hämtad från tentamen 2016-06-09 i kursen SF1624 Algebra och Geometri
Elias kommentar: Utmärkt uppgift! Förmåga att relatera till material i andra kurser är ett bra tecken på förståelse.

1a-1-2

Det kan vara svårt att hitta startgissningar till Newton's metod. Vi vill hitta en rot till funktionen $f(x) = x^5 + x^4 + \sin(x) + 10$. Programmera Newton's metod och använd som startgissning en rot till polynomet $p(x) = x^5 + x^4 + 10$. Bestäm startgissning med hjälp av funktionen roots()

`Hint: help roots`

1a-1-4

Consider the equation:
4x⁴ - 6x² - 11/4 = 0
Use Newton's method to solve this equation with initial guess ***x0 = 0.5*** . Does it converge to one of the roots of the equation? What about the initial guess ***x0 = -0.5*** ? If these guesses don't work, then what is the reason for the failure to converge?
Hint: Plot the function.

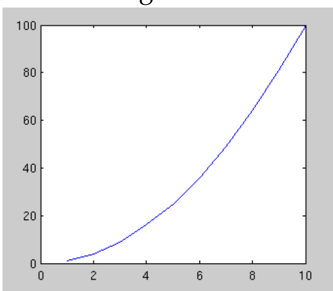
1a-1-7*

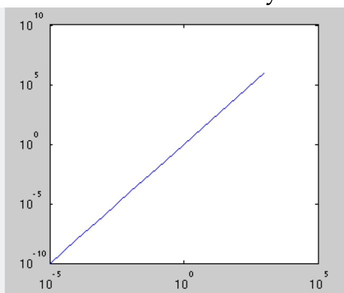
Lös ekvationssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ när
$f_1(x_1, ...x_n) = -3 + x_1^2 + \alpha x_2^2$
$\vdots$
$f_{n-1}(x_1, ...x_n) = -3 + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2$
$f_n(x_1, ...x_n) = -1 + x_1 + \cdots + x_n$
för $\alpha = 0.01$ med Newton's metod i flera variabler. Som startgissning, använd lösningen man får analytiskt (genom att lösa för hand) när $\alpha = 0$. Lös problemet för $n = 10$.

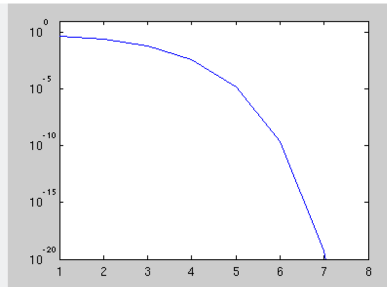
Obs: Vektorn
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
innehåller de okända värdena, så vi behöver göra Newton's metod i n=10 flera variabler. Jämför med uppgift 1b-1-4.

4a-1-3

Vilken av figurerna motsvarar kvadratisk konvergens, dvs det man förväntar sig i newtons metod? Vad är x-axeln och y-axeln?







2a-0-4

Substituera "?" med rätt formler så att foljande kod i matlab är en implementation av sekantmetoden

```
x(1)=-1;   x(2)=-1.1;
for i=?:8
    x(i+1)=x(i)-f(x(i))*?/?;
    error(i)=?;
end
```

2a-1-1

När man utför Newtons metod på funktionen
$f(x) = e^x \cdot \cos(x)$
för att hitta nollställen med startvärde $x_0 = 1$ kommer x_* att närma sig nollstället $x = \frac{\pi}{2}$. Efter hur många iterationer har det relativa felet för x_* blivit mindre än 0.01?

2a-1-2

Lös uppgift 2a-1-1 med sekantmetoden istället för Newton's metod. Använd startvärden $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$.

2a-1-4

Uppskatta x som uppfyller följande ekvation med hjälp av Newtons metod:
$2x^3 + x^2 - 2 = 0$
där x ligger i intervallet (-1,1)

2a-1-7*

You are given 3 spheres, each with radius = 1.0, and with centres at (1,1,0),(1,0,1) and (0,1,1) respectively. Use Newton's method to find the common points of the three spheres.

1b-1-1

Lös ekvationen
$5 = x^3$
med hjälp av **sekant**metoden genom att iterera **tre** gånger, med startgissningar $x_0 = 1, x_1 = ??$.

1a-1-2

Det kan vara svårt att hitta startgissningar till Newton's metod. Vi vill hitta en rot till funktionen $f(x) = x^5 + x^4 + \sin(x) + 10$. Programmera Newton's metod och använd som startgissning en rot till polynomet $p(x) = x^5 + x^4 + 10$. Bestäm startgissning med hjälp av funktionen roots()

```
Hint: help roots
```

2b-1-5

Lös ekvationssystemet med Newtons metod
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \pi^2 = 0$
$x_1 - x_2 - \alpha e^{x_2} = 0$
$x_2 - x_3 - \alpha e^{x_3} = 0$
$x_3 - x_4 - \alpha e^{x_4} = 0$
för $\alpha = 0.01$. Som startgissning, använd lösningen man får analytiskt (genom att lösa för hand) när $\alpha = 0$.

2b-1-6

(ENM 2.14)
En ellipsformad 400-meters löparbana ska anläggas på en plan som är 160 meter lång. Hur bred plan krävs? Använd Ramanujans formel för omkretsen till en ellips vars halvaxlar är a och b:
$Omkretsen \approx \pi(a+b)\left(1 + \frac{3c}{10+\sqrt{4-3c}}\right)$
där $c = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$
Lös problemet med Newton's metod.

3b-1-2
Vi vill hitta nollställen till en funktion $f(x)$ som är given utav ett uttryck i stil med
$f(x) = b(ln(c-d(x-y_1))(c-d(x-y_1))^{x-y_2} - d(c-d(x-y_1))^{x-y_2-1}(x-y_2))$
där b , c , d , y_1 och y_2 är några godtyckliga konstanter.
Varför kan sekantmetoden vara bättre lämpad än Newtons metod för detta problem?

4a-1-7
Antag att (likt exempel i föreläsning) det tar en timme att beräkna $f(x)$ på en snabb dator. Antag även att $f'(x)$ kan beräknas på en timme. Om vi börjar med iterationen med ett fel 0.1, hur många iterationer förväntar vi oss att sekantmetoden respektive Newtons metod behöver för att nå fel 10^{-16} ? Vilken är snabbast?

4a-1-5
Härled sekantmetoden (från en figur eller annan approximation).

Block 2:

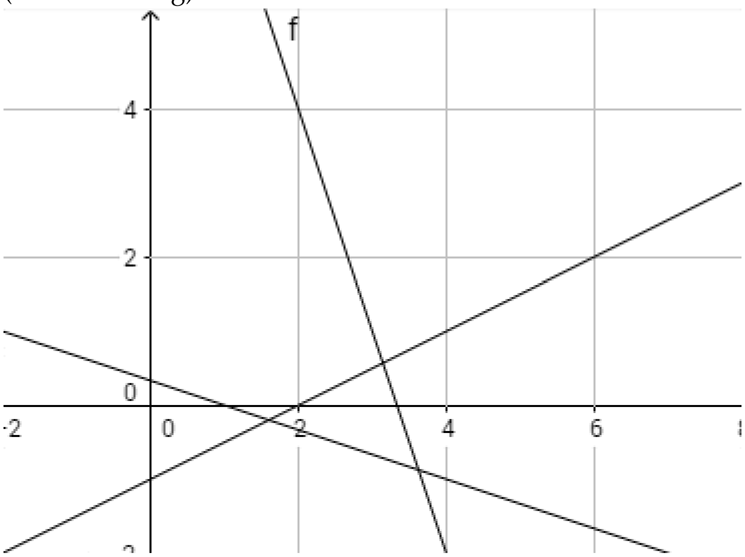
1a-2-1
Beskriv **Runges fenomen**. Hur kan man gå runt detta problem?

2a-2-1*
Approximera felet vid polynominterpolation av $\cos(x)$ där ett andragrads-polynom används för punkterna $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, dvs. hur är $\max_{x\in[0,\pi]} |p(x) - f(x)|$ begränsat?

2a-2-2
Varför är Newton-ansatsen bättre att använda vid numerisk polynom interpolation än Vandermonde-ansatsen?

2a-2-8
When using Newton's method for polynomial interpolation, we end up with an equation which looks something like: $A_N x = b$. Is this equation linear or non-linear. Explain why.

(saknar lösning) 2b-2-1



Följande ekvationer representerar tre linjer som skär varandra i olika punkter. Notera dock att det saknas en punkt där alla tre linjer skär varandra samtidigt (se bild).

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 3y = 1 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

Använd minstakvadratmetoden för att approximera en lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

i MATLAB.

2b-2-3

På vilka sätt är Newton-ansatsen bättre än den naiva ansatsen som leder till ett Vandermondesystem?

3a-2-1

Den räta linje y = ax + b som i minstakvadratmening bäst approximerar mätpunkterna (xi , yi), i = 1, 2, 3 i
tabellen

x 1 2 4

y 1 2 3

Skriv ett Program! Gärna Julia!

3a-2-8*

Genomför ekvidistant interpolation av funktionen 1/(10-|x|) i intervallet [-1,1] för godtyckligt antal punkter n.

3a-2-9

Koden nedan plottar kurvan $\frac{1}{1+25x^2}$ (i blått) på intervallet $[-1, 1]$.
Den plottar även en polynominterpolation (i rött) av kurvan med 11, ekvidistanta interpolationspunkter.

- Infoga grafen i svaret och beskriv vad som händer med interpolationspolynomet nära intervallgränserna.
- Vad är detta ett exempel på?
- Finns det något man kan göra för att undvika att detta händer?

Kod:

```
xv=[-1:0.2:1]';
f = @(x) 1./(1 + 25*x.^2);
fv = f(xv);
A = [ones(11, 1), xv, xv.^2, xv.^3, xv.^4, xv.^5, xv.^6, xv.^7, xv.^8, xv.^9,
xv.^10];
c = A\fv;
p = @(x) c(1)+c(2)*x+c(3)*x.^2+c(4)*x.^3+c(5)*x.^4+c(6)*x.^5+c(7)*x.^6+c(8)*x.^7+c(9)*x.^8+c(10)*x.^9+c(11)*x.^10;
tv=[-1:0.01:1];
plot(tv, f(tv), 'B');
hold on
plot(tv, p(tv), 'R');
```

3a-2-10

Newton-ansatsen leder till ett linjärt ekvationssystem med en matris som ser ut såhär

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & ? & & \vdots \\ 1 & \cdots & & ?? \end{bmatrix}$$

Vad ska ? och ?? vara? dvs (2,2)-elementet och (n,n)-elementet

3b-2-3
Bestäm med Newton-ansatsen polynomet p som går genom fyra punkter (1,3), (3,3), (4,0) och (5,11). Beräkna också värdet för p(7). Plotta polynomet i det relevanta intervallet.

(saknar lösning)3b-2-7
Vi har sagt på föreläsning att x-värdena måste vara skiljda. Antag att vi interpolerar funktionen f(x)=exp(0.7*x) i punkterna [1,2,2+z]. Plotta interpolationen för olika z-värden när z är litet. Vad händer när z->0? Vilket problem löser vi?

4a-2-1
Polynominterpolera enhetscirkeln i första kvadranten ($y = \sqrt{1-x}$, $x \in [0,1]$) i punkterna [0:0.1:1]. Eftersom det är 11 punkter borde det resulterande polynomet vara av grad 10. Svara både med polynomet utskrivet och en bild där både funktionen och polynomet är plottade. Välj fritt mellan att använda vandermondematris och newtons ansats.

(Detta var tidigare en fråga om en jacobimatris men eftersom det hörde till block 1 har jag ändrat frågan)

4a-2-11
Farbror Göran vill ta reda på hur fort hans kaffe svalnar. Han mäter därför kaffets temperatur var femte minut och kommer fram till följande mätvärden

t (min)	T(grader Celcius)
0	100
5	90
10	70
15	40

Finn interpolationspolynomet och ta reda på kaffets temperatur efter 7 minuter!

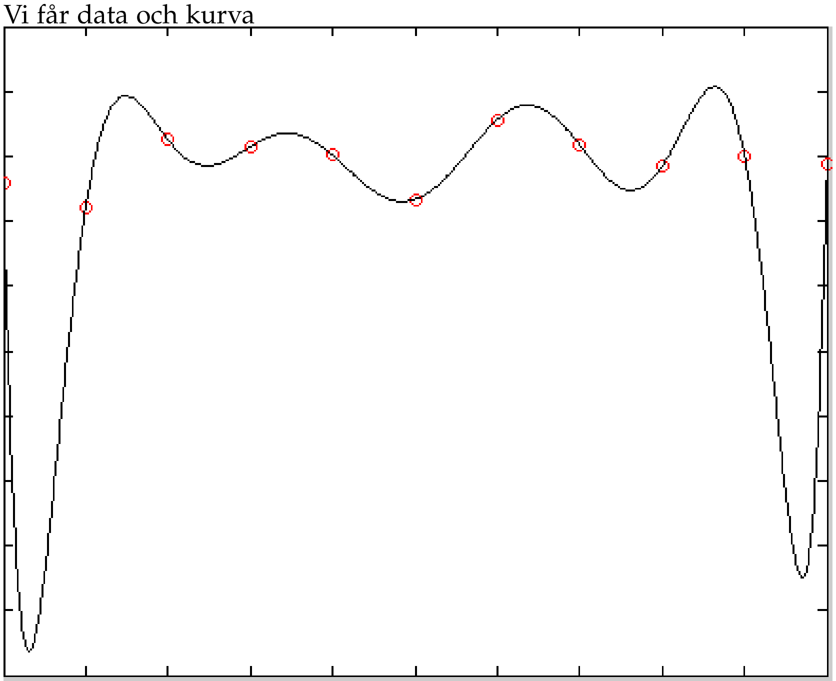
4b-2-4
Vi ska interpolera punkterna givna av

```
n=10;

xv=linspace(0,1,n)';

yv=100+randn(size(xv)) ;
```

och gör det med programmet

```
A=zeros(length(xv))

for k=1:length(xv); A(:,k)=xv.^(k-1); end

c=A\yv;

xvv=0:0.001:1;

yvv=zeros(size(xvv));

for k=1:length(xv);yvv=yvv+c(k)*xvv.^(k-1); end

clf;

plot(xv,yv,'ro'); ylim([0,120]);

hold on

plot(xvv,yvv,'k');
```

Vi får data och kurva



Datavärdena ligger omkring 100, men kurvan går ju långt utanför?
Blir det mer svängigt om vi ökar n eller minskar n?

4b-2-1
Beskriv Runges fenomen. När uppstår det och varför? Hur kan man undvika det?

Block 3:

1a-3-4
Beräkna centraldifferensen då x=2, h=1e-8 för funktionen $\sqrt{|\sin(x)\cos(x)|}$
.

1a-3-5
Beskriv varför steglängden h vid beräkning av finita differenser inte ska vara godtyckligt liten för att felet ska minimeras.

1a-3-7
Vad innebär kvadratisk interpolation?

1b-3-1
Härled diskretiseringsfelet i approximation
$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

1b-3-2
Centraldifferens definieras numeriskt enligt:
$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
h väljs som ett mycket litet tal för en bättre approximation.
Varför kan inte h väljas till ett hur litet tal som helst? Motivera och visa med ett exempel.

1b-3-10

Uppskatta derivatan av $y(x) = \sin x$ i punkten $x = \frac{\pi}{4}$ med hjälp av framåtdifferens och Richardson-extrapolerad framåtdifferens med $h = 0.01$.

1b-3-14

Skriv ett matlab program som beräknar följande integral med trapetsregeln.
$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

2a-3-2

Student A and Student B are in a numerical methods competition, where they are instructed to approximate an integral. Student A, being the genius that he is (and having studied SF1547), knows that approximating an integral using the Trapezium rule has accuracy order h^2 . Since Student B has chosen to use the Riemann sum, which has accuracy order h , Student A is sure that he will have the better approximation. The question that they get is to approximate the integral $\int_0^{10} 1dx$. When the results are in, both Student A and Student B have the exact same result!? Explain why is this. Would they have the same result if the integral was $\int_0^{10} xdx$? (You can assume they will have the same partitioning).

2a-3-3

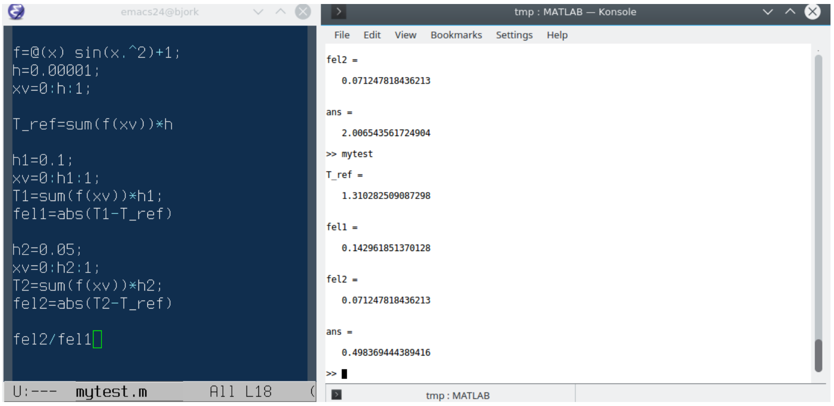
Använd Simpson regel för att uppskatta:
$\int_0^2 \sin(x) \, dx$

2b-3-3

Beräkna integralen $\int_0^{0.75} dx \div \left(1 + x^2\right)$ med hjälp av trapetsregeln.

2b-3-8

När vi halverar steglängden i trapetsregeln blir felet oftast 1/4 så stort (asymptotiskt sett). Här verkar det bara bli hälften så stort. Vad är problemet i programmet?



3a-3-1

Vi har
$\int_0^4 \cos(x) \cdot e^x dx$ och $\int_0^4 \cos(4x) \cdot e^x dx$
Beräkna integralernas värde med trapetsregeln (intervallbredd 0.5) och jämför resultatet med integralernas exakta värde.

- Vilken integral uppskattas bäst av trapetsregeln med intervallbredd 0.5?
- Varför?

3a-3-3

Determine ?? such that we get the highest order of accuracy in the approximation
$f'(x) \approx \frac{??f(x+h)+??f(x)+??f(x-h)}{??}$

3a-3-11

Påståendet att simpsons regel (dvs composite simpson) har noggrannhetsordning 4 gäller bara under vissa förutsättningar. Vad har simpsons regel för noggrannhetsordning när vi tillämpar den på funktionen
$f(x) = |x - \pi|$
som ska integreras [0,4]? Beräkna den exakta integralen och visualisera felet i simpson regel (gärna log-log-plot med h på x-axeln och felet på y-axeln).

3b-3-4

Härled noggrannhetsordningen för approximationen
$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$
med hjälp av Taylorutveckling. (Tips: Sauer avsnitt 5.1)

Block 4:

1a-4-1

Beskriv vad globalt och lokalt fel innebär. Vad som är skillnaden? Ange formlerna för respektive fel.

1a-4-3

Ge en intuitiv beskrivning av vad som sker i Explicita Eulermetoden (Euler framåt), rita gärna en bild.

1a-4-5

Consider the following IVP:
y′ = -y³+3y²-9y,   y(0) = 0.5
Write down the non-linear equation that we need to solve at each step if we use Backward Euler Method to solve this IVP.

1a-4-6

If we solve the following differential equation using Forward Euler method, what should be the condition on our time-step size 'h' to ensure absolute stability?
y′ = -2y, y(0) = 2

1a-4-8

För att lösa en diffekvation $y' = f(t,y)$ har vi formeln $y_{i+1} = y_i + h[c_1 f(t_i, y_i) + c_2 f(t_{i+1}, y_{i+1})]$. Vad har vi för krav på konstanterna c_1 och c_2 för att detta ska vara en explicit metod?

1a-4-12
Betrakta begynnelsevärdesproblemet
$y'(t) = 3\sin(t)y(t) + e^t$
$y(0) = 1$
Man kan visa att för tillräckligt små t -värden är framåt Euler absolutstabil (för ett fixerat h -värde). Ange ett t-intervall där metoden är stabil. Formeln ska innehålla h.

1b-4-3
Förklara skillnaden mellan Globalt fel och Lokalt fel. Förklara även hur de hänger ihop samt visa med ett exempel.

1b-4-9
Gör en approximation av $\cos(1)$ med hjälp av Euler framåt genom att lösa begynnelsevärdesproblemet
$y'(t) = -\sqrt{1 - y(t)^2}$
$y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

(Detta är en förbättring av 1b-4-5)

1b-4-11
Betrakta begynnelsevärdesproblemet
$y'(t) = \alpha y(t) + \sin(t)$
$y(0) = 1$
För vilka av α -värden och h -värden är Euler framåt absolutstabil?
a) $\alpha = -10, h = 0.3$
b) $\alpha = -10, h = 0.1$
c) $\alpha = -10, h = 0.01$
d) $\alpha = -1, h = 0.1$
e) $\alpha = -1, h = 0.01$

2a-4-1
For y=y(t), find an approximation of y(0.2) using two iterations (0.1 per step) of Euler's method ("Euler framåt") where

$$\begin{cases} y'' = sin(y) + y'cos(t) \\ y(0) = \pi \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

2a-4-7

Följande matlab funktion är en implementation av trapetsmetoden för approximera
$\int_a^b f(x)dx$

```
function [ I ] = trapez( f, a, b, N )
    xx=linspace(a,b,N); h=xx(2)-xx(1);
    I=f(xx(1))+f(xx(N))+sum(f(xx(2:N-1)));
    I=I*(h/2);
end
```

Men det fungerar inte. (Testa det!) Varför? Kan du fixa det?

3b-4-1

Genomför Euler's metod för begynnelsevärdesproblemet
$y_1'(t) = y_1(t)y_2(t)$
$y_2'(t) = 10 + y_1(t) + y_2(t) - t$
med startvärden
$y_1(10) = 4$ och $y_2(10) = 4$
Plotta y_1(t) och y_2(t) inom intervallet [10,20] med tillräckligt liten steglängd så att ni inte ser skillnad när ni halverar steglängden.

3b-4-3

Vi ska lösa begynnelsevärdesproblemet
$\ddot{q}_1(t) = q_1(t)q_2(t)$
$\ddot{q}_2(t) = 1 + q_1(t)\dot{q}_2(t) + t$
med startvärden
$q_1(0) = 3$
$\dot{q}_1(0) = 0$
$q_2(0) = 3$
$\dot{q}_2(0) = 1$
a) Skriv om på standardform
b) Implementera Euler framåt för att beräkna $q_1(10)$.

3b-4-9

Vi vill lösa randvärdesproblemet y"(x)=f(x,y) med y(0)=0 och y(1)=1.4.
Vi vill använda oss av inskjutningsmetoden (shooting method) kombinerat med sekantmetoden.
För att programmera detta behöver vi en metod som

- ☐ beräknar $y(0)$ givet $y(1)$
- ☐ beräknar $y(0)$ givet $y'(1)$
- ☐ beräknar $y'(0)$ givet $y(1)$
- ☐ beräknar $y'(0)$ givet $y'(1)$
- ☐ beräknar $y(1)$ givet $y(0)$
- ☐ beräknar $y(1)$ givet $y'(0)$
- ☐ beräknar $y'(1)$ givet $y(0)$
- ☐ beräknar $y'(1)$ givet $y'(0)$

(Från tenta 2016-08-22 del1)

3b-4-13

4a-4-6

Vilken om någon av följande figurer motsvarar hur man förväntar sig att felet i Euler framåt (globalt fel) beter sig? Varför?

4a-4-7

Betrakta två begynnelsevärdesproblem
$y'(t)=3y(t)$
$y(0)=1$
och
$z'(t)=2z(t)$
$z(0)=0$
Hur stort blir felet för ett steg av Euler's metod när vi tillämpar den på detta problem? För vilket begynnelsevärdesproblem blir felet mindre? Varför?

4b-4-3

Funktionen y(t) uppfyller begynnelsevärdesproblemet

$y'(t) = y(t)\sin(t) + 0.5$
$y(0) = \beta$
Vi ska bestämma β så att $y(0.5) \approx 0.5$ och $y(1) \approx 1$. Visa att Euler framåt kan skrivas som ett system av ekvationer
$A\mathbf{w} = \mathbf{c}(\beta)$
där

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix}$$

Bestäm A och $\mathbf{c}(\beta)$, så att vi kan skriva lösningen som $\mathbf{w} = A^{-1}\mathbf{c}(\beta)$.
Med hjälp av detta, härled ett minstakvadratproblem så att

$$\begin{bmatrix} y_{n/2} \\ y_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4b-4-4

Vi har formeln $\frac{c_1 y(x+h) - c_2 y(x-h)}{h}$ för att approximera $y'(x)$. Bestäm c_1 och c_2 för så hög noggrannhetsordning som möjligt genom Taylorutveckling.

2b-4-6

Använda matlab.
Låt $y(t)$ lösning av följande differentialekvation för $-\pi \le t \le \pi$

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t\cos(y(t)) \\ y(-\pi) = 1 \end{cases}$$

Beräkna
$\int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt$

2b-4-9

Vi vill lösa randvärdesproblemet
$y''(t) = 1 - 2(y'(t))^3$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
Välj en metod som vi gått igenom i kursen och lös problemet. Ange kod och rita en figur av lösningen $y(t)$ för $0 \le t \le 1$.

3a-4-2

Vi har differentialekvationen
$y'(x) = y(x)$ med
till $y(5)$. Använd steglängd h = 0.5.

- Hur bra blir approximationen? (Jämför med den exakta lösningen)
- Vad är det globala felet i $x = 5$?

3a-4-9

Antag att Euler framåt är stabil för alla t -värden och $h = 0.1$ när den tillämpas på differentialekvationen
$y'(t) = f(y(t))$
$y(0) = y_0$
Visa att Euler framåt även är stabil för alla värden $h < 0.1$.

3a-4-10

Vad blir approximationen av y(2) med Euler framåt med steglängd h=0.5 applicerat på y′(t)+2y(t)=4 och y(0)=0?
Räkna för hand ej dator.

3a-4-12

Genomför ett steg av bakåt Euler på systemet
y′(t)=3y(t)+1
y(0)=1
med h=0.1