



Läsanvisningar

Henrik Shahgholian

Läsanvisningarna nedan är här tagits fram som hjälpmedel för de studenter som vill helst ha en snabb tillgång till de mest centrala delarna i kursen och vill slippa gå igenom det tunga materialet i boken som är föreslagen av kursinnehållet. Jag kommer att i viss mån peka ut dessa centrala delar i textboken: *Calculus by Adams and Essex (8th edition)*. Ni kan även komplettera dessa förslag med uppgifter i seminarieanvisningar.

Nedan föreslagna läsanvisningar täcker inte material för högre betyg. För högre betyg behöver ni ha ett noggrant igenom av kursmaterialet som är föreslagen på kurswebben.

Jag har valt ett informellt språkbruk i texten då detta är ett första utkast, och kommer under året att bearbetas till en mer formell text.

1. GRUNDLÄGGANDE FÖRKUNSKAPER OCH INFÖR START

Kursen flervariabelanalys bygger på en del kunskaper och begrepp från tidigare kurser SF1624 Algebra och geometri och i SF1625 Envariabelanalys. En förutsättning för lyckad studiegång för denna kurs är att man har motsvarande kunskaper och är rätt förtrogen med begreppen, definitioner och satser. Man ska även kunna hantera djupare moment som deriveringar och integration samt ha bra intuition för geometrisk tänkande. Följande moment från tidigare kurser ska repeteras av studenten innan kursen startar.

1.1. Moment från Envariabelanalys som man ska behärska är.

- Begreppen funktion, definitionsmängd, värdemängd
- Begreppen gränsvärde, kontinuitet, derivata och integral, def och tolkningar
- Potenslagar, loglagar, trigformler mm elementära samband och räkningar
- Derivation av envariabelfunktioner, inklusive produkt-, kvot- och kedjeregeln
- Integration av envariabelfunktioner, inklusive variabelsubst och partiell integr
- Taylors formel i en variabel, inklusive specialfallet linjär approximation
- Max och min av envariabelfunktioner
- Tillämpningar och användningar av derivator och integraler
- Andragradskurvorna cirkel, ellips, hyperbel, parabel

- Lösning av linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter

1.2. Moment från Algebra och geometri som man ska behärska är.

- Begreppen vektor, matris, determinant, linjär avbildning, def och tolkningar
- Begreppet invers, definition, tolkning, räkning och användning
- Elementär räkning med vektorer, matriser och determinanter
- Skalarprodukt, vektorprodukt, trippelprodukt, räkning och användning, geometri
- Linjer och plan, lösning av linjära ekvationssystem
- Begreppen linjärt beroende / linjärt oberoende, räkning och användning
- Begreppen bas och dimension, basbyte
- Egenvärden och egenvektorer, definition, tolkning och användning
- Diagonalisering av kvadratiske former

1.3. **Innan kursstart.** Innan Flervariabelanalys börjar är det lämpligt att **läsa igenom** kapitel 10 i boken Calculus, a complete course (8:e upplagan), av Adams och Essex, samt ordentligt **repetera** det av ovanstående som eventuellt inte sitter.

KAPITEL 10

- Avsnitt 10.1:**
- Allt ska läsas, och alla exempel ska genomgås.
 - Mycket viktig att kunna rita upp geometriska figurer i 3-dimensioner.
 - Lär dig noggrann topologiska begreppen: omgivning, open och sluten mängd, randpunkter, komplement, ...
 - Mycket viktig att kunna rita 2-dimensionella områden typ

$$D := \{y > x, \quad y < x^2\} \quad \text{etc.}$$

Avsnitt 10.5: Detta avsnitt brukar inte tas upp av föreläsaren, men behöver kunnas. Vi har sett detta som förkunskap, och vi kräver att ni kan den innan ni kommer till första föreläsningen. Delar av avsnittet ingår i SF1624 samt SF1625. Därför läs den noggrann och gör övningarna. Ni kommer att märka att många frågor i kursen utgår ifrån att ni kan detta avsnitt. Här ska ni även hämta era kunskaper från linjär algebran om kvadratiske ytor. Vi använder de senare i kursen. Så repetera detta ordentligt.

- Avsnitt 10.6:**
- Lär dig cylindriske koordinater på sidan 598.
 - Starta med avsnitt 8.5 (sidan 483–484) polära koordinater som repetition.
 - Diskussionen på sidan 599 och även 601 kan man i första hand hoppa över. Har ni tid läs igenom den också.
 - Exempel 1–3 ska läsas igenom ordentligt.
 - Sid. 600 Definitionen av sfäriska koordinater ytterst viktig.
 - Sid. 601, Gör Exempel 4a.
 - Ex. 4b är lite svårare och behöver relation mellan sfäriska och cylindriske koordinater.
 - **VIKTIG:** Cylindriske och Sferiska koordinater används först vid multipelintegraler. Så ni får repetera de igen senare.

KAPITEL 11

- Avsnitt 11.1:** – Definitionen på positionsvektor, hastighet $\mathbf{v}$ (det är en vektor), fart $|\mathbf{v}|$ längden av hastighetsvektorn, samt acceleration.
 – Gör alla exempel på sidorna 624–626.
 – ögna igenom Sats 1 och formlerna i satsen.
 – Gör Exempel 6 på sidan 628.
- Avsnitt 11.2:** – Läs Exempel 2 på sidan 631.
- Avsnitt 11.3:** – Läs ordentligt igenom avsnittet t.o.m. sidan 641.

KAPITEL 12

- Avsnitt 12.1:** – Fokusera först på funktioner av 2-variabler. Försök rita grafer. Använd gärna ett program som kan rita grafer. Det finns gott om sådana på webben, ex.vis: www.wolframalpha.com.
 – Gör först ett försök själv sen jämför med en datorbild.
 – Nivåkurvor ska ni också kunna. Rita gärna nivåkurvor själv och sen en datorbild för att jämföra.
 – Alla exempel på avsnittet ska gås igenom.
 – Sidan 676-677 ger förslag på Maple. Den behöver ni inte om ni använder wolfram.
- Avsnitt 12.2:** – Definition 2 behöver ni förstå för att kunna bilda en uppfattning av begreppen senare.
 – Exempel 2 är ett enkelt exempel på att hitta gränsvärden. Men för att göra ett rigorös bevis utifrån definitionen kommer att bli ganska svårt.
 – Läs exempel 3, 4, som ger en bild av att funktioner kan ha ovanliga beteenden, när det gäller gränsvärden.
 – Definition 3 (kontinuitet) är mycket viktig begrepp.
 – Försök med exempel som visar diskontinuitet, snarare än kontinuitet. Eller att gränsvärden inte existerar.
 – Observera att hitta gränsvärden för funktioner är mycket mer krävande än att visa att de inte har gränsvärden (när de är sådana).
- Avsnitt 12.3:** – Partiella derivator är en central del i kursen. Def. 4 sidan 683 måste ni förstå ordentligt. Läs sidorna 683–686 i detalj med alla exempel.
 – Tangent plan och normallinje (sidorna 686–688) är typisk återkommande frågor.
 – Exempel 8 är en tillämpning för normallinjer till ytor. Man kan återkomma till detta senare om man inte hinner med den. Men den ska man kunna.
- Avsnitt 12.4:** – Derivator av högre ordning ska ni kunna utföra. Speciellt upp till ordning 2.
 – Läs sidan 690, samt exempel 1, 2 och 3.

- Sats 1 bör kunnas (dock inte bevis). Dvs att ordningen spelar inte någon roll vid partiella derivator av högre ordning: $f_{xy} = f_{yx}$ om förutsättningar i satsen gäller.

- Avsnitt 12.5:**
- Avsnittet handla om kedjeregeln i högre dimensioner och uppfattas som svårt. Därför behövs mer tid med detta.
 - I första läsning kan man hoppa över Homogena funktioner och sats 2 (sidan 700-701) samt Ex. 10.
 - I första hand ska man göra enkla exempel och övningar som Exempel 2, 3, och övningar med första derivator.
 - De blå/lila markerade boxarna ska läsas i samband med exemplen för att förstå de bättre.
 - De lite svårare exemplen (Exempel 3, 8, 9) är ett två steg problem. Där vi har sammansatta funktioner. Öva på dessa också.

- Avsnitt 12.6:**
- Linjär approximation är mycket viktig. Differentierbarhet och differentialer är svårare begrepp och man behöver inte fördjupa sig i först läsningen.
 - I första läsning gå igenom Exempel 1, 3, 4.

- Avsnitt 12.7:**
- Avsnittet är mycket viktig och allt ska läsas i detalj. Förutom exemplen i boken titta även på gamla tentor där det finns en del uppgifter kring detta.

- Avsnitt 12.8:**
- Detta är en utvidgning och tillämpning av avsnitt 12.5 och handlar om Implicita funktioner.
 - I första hand och beroende på tid och ambition ska man göra exempel.
 - Läs Exempel 1, 3, och liknande övningar på sidan 736: 1–5. (ska kunnas även för betyg E).
 - Den mer ambitiösa ska läsa system av ekvationer sidorna 728–730.
 - Jakobianen, Definition 8 sidan 732 ska kunnas. Den behövs senare för variabelbyte för integraler och kommer att återopas.
 - Formeln i blå/lila boxen sidan 735 är viktig speciellt för variabelbyten senare.

- Avsnitt 12.9:**
- Här skulle jag föreslå att i första hand ni gör exempel efter att lyssnat på föreläsaren. Texten och speciellt notationen i boken är inte optimala för självstudier, och därför måste avsnittet läsas flera gånger.
 - Exempel 2, 3 ger en bra bild av vad som görs i avsnittet
 - Exempel 2 bör läsas och är grunden för teorin och metoden
 - Exempel 4 är en aning svårare då den använder implicita funktioner.

KAPITEL 13

- Avsnitt 13:1**
- Extremvärden är en viktig tillämpning av derivator.
 - Sats 1, sidan 746 är mycket viktig att förstå.
 - även Sats 2 är viktig för förståelsen. Bevisen behöver man inte kunna men man måste förstå satsen för tillämpningar.

- Läs alla exempel, samt Remark på sidan 750 som är mycket viktig.

Avsnitt 13:2 – Läs enbart Exempel 1, 2, 3.

Avsnitt 13:3 – För betyg E läs igenom ordentligt sidorna 759–762, samt Ex. 4. För högre betyg läs resten av avsnittet.

Avsnitt 13:4 – Lagrange multiplikatormetod i högre dimensioner. Ett svårt avsnitt, som ofta inte kommer upp på lägre betygsskalan.

KAPITEL 14

Avsnitt 14.1: – Avsnittet är en introduktion till dubbelintegraler och ger inga verktyg för beräkningar.
 – Man ska dock läsa igenom för att förstå innebörden av dubbelintegraler och hur man sätter upp hela konceptet.
 – Föreslår att ni lyssnar på föreläsaren om ni inte har tid att läsa avsnittet.

Avsnitt 14.2: – Viktig att förstå x-enkla samt y-enkla områden. Se bildern på sidan 813 och läs texten där.
 – Titta på sats 2 och sen börja direkt med exemplen: Exempel 1–3

Avsnitt 14.3: – För betyg E ska man i princip bara läsa exemplen.

Avsnitt 14.4: – Dubbel integraler, polära koordinater mycket användbara och ofta förekommande.
 – Allt ska läsas noggrant.
 – Lägg extra tid på variabelbyte, sidan 829-831, samt sats 4. Glöm ej ABSOLUT värdet i satsen på högra sidan.

Avsnitt 14.5: – Här är det trippelintegraler, men mest enkla fall.
 – Våra erfarenheter visar att många av studenterna får problem redan här. Därför ska avsnittet läsas noggrann.

Avsnitt 14.6: – Varenda rad ska läsas, och övas på.
 – Variabelbyten och sfäriska och cylindriska koordinater mycket centralt.

Avsnitt 14.7: – Tillämpningar av det ni lärt er hittills.
 – Läs noggrann area hos ytor (848-849)
 – Läs om masscentrum.
 – Formlerna på sidan 851 ska kunnas.

KAPITEL 15

- Avsnitt 15.1:**
- Sidorna 859-860 ska läsas för definition och begrepp av vektorfält.
 - Läs exempel 1, 3, 4, 5.
 - Observera att det finns flera namn för flödeslinjer (integralkurvor, trajektorier, ...).
- Avsnitt 15.2:**
- Definition av konservativa fält, samt potential funktioner är centrala delar i kursen.
 - Blå/lila texterna på sidan 868 viktiga.
 - Läs alla exempel. Ex. 5 (i omformulerade versioner) är speciellt intressant.
 - Sidorna 872–873 är självstudie material för de intresserade.
- Avsnitt 15.3:**
- Sida 875 är definitionen för linjeintegraler och ska kunnas.
 - Läs sidorna 876–878. Blå/lila texten på sidan 876 ska kunnas.
- Avsnitt 15.4:**
- Definition på arbete ska kunnas, se definitionen på sidan 880 och den blå/lila texten

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- Läs exempel 1,2.
 - Definition på sammanhängande samt enkelsammanhängande och oberoende av väg är mycket viktiga för enklare beräkningar i en del uppgifter.
 - På sidan 884 ska ni lära er blå/lila texterna. Sen titta på exempel 3, 4.
- Avsnitt 15.5:**
- Detta är ett svårt avsnitt! Börja med att förstå hur en normal till en yta kan fås fram (se den första blå/lila boxen på sidan 891 samt bilden på sidan 890).
 - I ett nötskal kan man säga att det hela handlar om att få fram dS i integralen.
 - Försök mest med att räkna areor av ytor.
 - Att ha med en funktion $f(x, y, z)$ i bilden är inte att föredra i första hand.
 - Även om frågor av denna typ inte har funnits på A delen av tentan kan det vara av ytterst vikt att kunna avsnittet för att använda detta senare och i andra ämnen.
 - Försök att läsa exemplen först för att förstå hur man skriver om dS i olika fall.
 - Sida 895, The attraction of a spherical shell kan man hoppas över i första läsning och för betyg E.
- Avsnitt 15.6:**
- Igen ett svårt avsnitt.
 - Notationen $\hat{\mathbf{N}}$, är lite förvirrande så lägg extra märke till detta. Blandas ofta med $\mathbf{n}$!
 - För att kunna läsa detta avsnitt ska man vara väl förtrogen med avsnittet innan om ytor.
 - Alla exemplen är viktiga och ska läsas. Frågor av dessa typ kommer ofta på del B eller C.

- Observera att i $d\mathbf{S}$ är $\mathbf{S}$ är en vektor.

KAPITEL 16

Det har visat sig under årens gång att även om detta är ett svårt avsnitt kan man hämta hem delpoäng genom att ta lite tid med definitioner, men man ska vara rätt exakt. Dessutom är detta kapitel det mest intressanta av alla och här finns det en del tillämpningar som kan förekomma i andra ämnen.

Avsnitt 16.1: Sidorna 906–908 (ej sats 1) ska läsas. Läs Ex. 5 på sidan 912.

Avsnitt 16.2: Läs sidan 914, samt Ex. 1 sidan 918. Delar i Sats 3 ska kunnas: (g), (h). Sats 4, 5 ska kunnas utan bevis.

Avsnitt 16.3: Allt ska läsas flera gånger om. Hur satserna används är mycket viktig i övningar.

Avsnitt 16.4: Läs formel i sats 8 och tillämpa direkt på exempel 1–5.

Avsnitt 16.5: Stokes sats (Sats 10) är ofta förekommande i tillämpningar. Formeln ska ni kunna, dock ej beviset. Läs exempel 1, 2.