



Uppgifter till Seminarium 6

Se kursens canvassida för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Seminariet börjar med ett prov. Uppgifter kommer att handla om att diagonalisera en kvadratisk matris.

Själva seminariet handlar om att diskutera följande uppgifter.

Uppgift 1. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{V}$ till basen $\mathcal{W}$ av ett delrum U av $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm övergångsmatrisen från bas $\mathcal{W}$ till bas $\mathcal{V}$.

(b) Låt $f: U \rightarrow U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$.

(Med $[f]_{\mathcal{B}}$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen $\mathcal{B}$.)

Uppgift 2. Betrakta följande avbildning:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (0, x)$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenrum till F .

(b) Bestäm om matrisen till F är diagonaliserbar.

Uppgift 3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm egenvärdena till A och egenrum till varje egenvärde.

(b) För vilka val av a är A diagonaliserbar?

(c) Bestäm för $a = 0$ en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

Uppgift 4. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Hitta alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till A .
- (b) Bestäm en matris U och en diagonal matris D sådant att $A = UDU^{-1}$.
- (c) Beräkna $A^{123} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Uppgift 5. Den kvadratiske formen Q på $\mathbb{R}^2$ ges av

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

- (a) Ange den symmetriska matris A som uppfyller $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$.
- (b) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit.

Uppgift 6. Vilka av följande mängder är vektorrum? Bestäm en bas och dimensionen till dem som är vektorrum.

- (a) Alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^4$ sådana att $x + y + z - w = 1$
- (b) Alla polynomfunktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ av grad ≤ 5 (d.v.s. $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$)
- (c) Alla inverterbara 3×3 -matriser
- (d) Alla 3×3 -matriser som uppfyller $A^T = -A$. Här betecknar A^T transponaten av A .

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad är sammanhanget mellan symmetriska och ortogonala matriser?
- Varför är symmetriska matriser diagonaliserbara?
- Vad är en kvadratisk form och hur klassifierar man dem?