



Uppgifter till Seminarium 5

Se kursens canvassida för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Seminariet börjar med ett prov. Uppgiften kommer att handla om att bestämma en ortonormalbas till ett givet delrum av $\mathbb{R}^n$

Själva seminariet handlar om att diskutera följande uppgifter.

Uppgift 1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en bas för nollrummet, $\text{Null}(A)$.
- (b) Bestäm en bas för kolonnrummet, $\text{Col}(A)$.

Uppgift 2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla vektorer som ligger i båda $\text{Col}(A)$ och $\text{Col}(B)$. Förklara varför alla vektorer som ligger i båda $\text{Col}(A)$ och $\text{Col}(B)$ bildar ett delrum i $\mathbb{R}^3$ och beräkna dess dimension.
- (b) Bestäm en vektor i $\text{Col}(A)$ som inte ligger i $\text{Col}(B)$.

Uppgift 3. Låt

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

vara standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och låt

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (a) Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$.
- (b) Bestäm koordinatvektorn $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- (c) Bestäm matriser M och N sådana att

$$[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = M [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{och} \quad [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = N [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$$

för alla vektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

Uppgift 4. En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

- Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minstakvadratmening.
- Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna.

Uppgift 5. Låt $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en godtycklig, men inte specificerad linjär avbildning.

- Varför är dimensionen av bildrummet $\text{Im}(L)$ av L högst 2?
- Låt $\vec{b}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ligger utanför bildrummet $\text{Im}(L)$. Beskriv hur man bestämmer de vektorer $\vec{x}$ som minimerar $\|L(\vec{x}) - \vec{b}\|$.
- Tillämpa b) för att hitta minsta värdet av $\|L(\vec{x}) - \vec{b}\|$, då $L(\vec{x}) = (x_1, -x_2, x_1 + x_2)$, och $\vec{b} = (1, 2, 3)$.

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad menas med en ortogonal matris?
- Vad är syftet med minstakvadratmetoden?
- Vad är sammanhanget mellan minstakvadratmetoden och (ortogonala) projektioner?