



Uppgifter till Seminarium 4

Se kursens canvassida för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Seminariet börjar med ett prov. Uppgiften kommer att handla om att bestämma standardmatrisen till en geometriskt definierad avbildning

Själva seminariet handlar om att diskutera följande uppgifter.

Uppgift 1. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Förklara varför matrisen $B = \frac{1}{19}A$ har samma egenvektorer som matrisen A .

Uppgift 2. Den här uppgiften handlar om linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och deras standardmatriser.

- (a) Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotationen kring origo med en vinkel på 90° ($\pi/2$ radianer) moturs. Bestäm standardmatrisen, A , för T_1 .
- (b) Låt $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $y = -x$. Bestäm standardmatrisen, B , för T_2 .
- (c) Bestäm standardmatrisen, C , för sammansättningen $T_2 \circ T_1$.
- (d) Avbildningen $T_2 \circ T_1$ är en spegling. I vilken linje? Motivera ditt svar.

Uppgift 3. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uppfyller

$$T \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm matrisen A som hör till T .
- (b) Kontrollera att A är sin egen invers.

Uppgift 4. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ x - 2y \\ y - x \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm matrisen för T .
(b) Avgör om någon av vektorerna

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ligger i bildrummet $\text{im}(T)$.

Uppgift 5. En avbildning f sökes som uppfyller

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Varför finns det ingen sådan avbildning som är linjär?
(b) Hur måste man anpassa det sista värdet, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, så att en sådan linjär avbildning f finns?
(c) Finn standardmatrisen till f (om det sista värdet anpassas som i uppgift b).

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad är den geometriska tolkningen av egenvektorer till en linjär avbildning? Till exempel till egenvärdena 0 eller 1?
- Varför är egenvektorer till olika egenvärden linjärt oberoende?
- Vad menas med linjär avbildning? Är varje linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ en matrisavbildning? Hur många rader och kolonner har avbildningens matris?
- Vad menas med en avbildnings nollrum/kärna och bildrum? Vilka vektorer utgör nollrum och bildrum till en rotation och till en spegling?