



## Uppgifter till Seminarium 3

Se kursens canvassida för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Seminariet börjar med ett prov. Uppgiften kommer att handla om att beräkna en determinant genom kofaktorexpansion och/eller genom Gausselimination.

Själva seminariet handlar om att diskutera följande uppgifter.

**Uppgift 1.** Låt  $Ax = b$  vara ett linjärt ekvationssystem, där  $A$  är en  $m \times n$ -matris (d.v.s.  $m$  ekvationer i  $n$  variabler) och  $Ax = 0$  det tillhörande homogena ekvationssystemet. Motivera varför var ett av följande påståenden är sant eller fel:

- Om  $Ax = 0$  har en nollskild lösning, så har  $Ax = b$  också en lösning, oavsett  $m$  och  $n$ .
- Om  $Ax = b$  har en lösning, så har  $Ax = 0$  en nollskild lösning, oavsett  $m$  och  $n$ .
- Om  $m < n$  så kan  $Ax = b$  inte ha en unik lösning.
- Om  $m > n$  så kan  $Ax = b$  inte ha en unik lösning.
- Om  $Ax = b$  har en entydig lösning så är  $x = 0$  den enda lösningen till  $Ax = 0$ .

Ett enkelt motexempel är den bästa motiveringen till varför ett påstående är fel!

**Uppgift 2.** Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

är ett specialfall av en typ av matriser som ofta förekommer i olika tillämpningar, exempelvis i samband med diskretisering av differentialekvationer för numerisk lösning. Använd rad- eller kolonnoperationer för att beräkna determinanten av matrisen  $A$ .

**Uppgift 3.** De fyra vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i  $\mathbb{R}^4$  är linjärt beroende. Skriv en av dem som en linjärkombination av de andra.

**Uppgift 4.** En *tetraeder* är en tredimensionell kropp med fyra hörn och där sidorna är trianglar. De fyra punkterna  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, 2, -3)$ ,  $B = (3, 1, 0)$  och  $C = (0, 2, 1)$  utgör hörnen i en tetraeder. Volymen av tetraedern kan beräknas som en sjättedel av absolutbeloppet av trippelprodukten,  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ , av de tre vektorer som går från ett av hörnen till de tre andra.

- (a) Beräkna vektorprodukten av de två vektorerna  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  och  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
- (b) Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i punkterna  $O$ ,  $A$ ,  $B$  och  $C$ .

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad är definitionen of linjärt oberoende? Vad är ekvivalenta sätt att uttrycka det?
- Vilken metod är bäst för att beräkna en determinant?
- Kan man definiera kryssprodukten för vektorer av annan längd än 3 på ett vettigt sätt?