Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1513, SF1514, SF1518, SF1519, SF1541, SF1543
14.00-17.00 18/12 2018

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

1a. (5p) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + xu(x) &= x^2,\ 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u(1) = 2, \end{aligned} \tag{A}$$

ska lösas med hjälp av finita differensmetoden. Skriv upp det linjära ekvationssystem som ska lösas om den konstanta steglängden $h = 1/4$ används.

1b. (7p) Skriv ett Matlab-program som beräknar finita differenslösningen till randvärdesproblemet (A) med konstant steglängd $h = 1/100$. Programmet ska skriva ut den beräknade approximationen av $u(1/2)$ på skärmen.

1c. (7p) Skriv ett Matlab-program som beräknar finita differenslösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + xu(x) &= x^2,\ 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u'(1) = 2, \end{aligned}$$

dvs. samma ekvation som tidigare fast med ändrat randvillkor. Programmet ska använda steglängden $h = 1/100$ och skriva ut den beräknade approximationen av $u(1/2)$ på skärmen.

1d. (5p) Vi betraktar nu ett ickelinjärt randvärdesproblem,

$$\begin{aligned} -u''(x) + \frac{\big(u(x)\big)^2}{100} &= x^2,\ 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u(1) = 2. \end{aligned}$$

Lösningen till detta kan approximeras med finita differensmetoden tillsammans med Newtons metod. Antag att vi vill finna lösningen med steglängden $h = 1/4$. Bestäm en rimlig startgissning till Newtons metod, och skriv upp det linjära ekvationssystem som ska lösas i första Newton-steget.

Vänd!

1a. Vi vill hitta finita differens-approximationen u_i, där $u_i \approx u(x_i)$ och $x_i = ih$. Randvillkoren ger att $u_0 = 0$ och $u_4 = 2$. Insättning av finita differens-approximationen av andraderivatan ger

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + x_i u_i = x_i^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dessa tre ekvationer och randvillkoren ger det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + x_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + x_2 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 + \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

1b. Det linjära ekvationssystemet har samma struktur som i uppgift 1a, så ett exempel på Matlab-kod ges av

```
N=100;
h=1/N;
x=(h:h:1-h)';
A=diag(-1/h^2*ones(N-2,1),-1)+diag(2/h^2+x)+diag(-1/h^2*ones(N-2,1),1);
b=x.^2;
b(end)=b(end)+2/h^2;
u=A\b;
disp(['Approximationen i mitten av intervallet= ',num2str(u(N/2))])
```

1c. Finita differens-approximationen blir som i uppgift 1a och 1b

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + x_i u_i = x_i^2, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Dessutom behöver en approximation av det högra randvillkoret göras, t.ex.

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = 2.$$

Med användning av detta ges ett exempel på Matlab-kod av

```
N=100;
h=1/N;
x=(h:h:1-h)';
%Matrisen A, som har dimensionen N*N, skapas med hjalp av diagonalmatriser.
%Nar detta ar gjort andras sista raden for att matcha hogra randvillkoret
A=diag(-1/h^2*ones(N-1,1),-1)+diag(2/h^2+[x;0])+diag(-1/h^2*ones(N-1,1),1);
A(N,N-1)=-1/h; A(N,N)=1/h;
b=x.^2; b(N)=2;
u=A\b;
disp(['Approximationen i mitten av intervallet= ',num2str(u(N/2))])
```

1d. Finita differens-approximationen av det icke-linjära randvärdesproblemet ges av lösningen till $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$*, där*

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_3 \end{pmatrix}$$

och

$$f_i = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{u_i^2}{100} - x_i^2.$$

Jacobimatrisen till $\mathbf{f}$ *har samma struktur som matrisen* A *i uppgift 1a, förutom att diagonalelementen ges av* $\frac{2}{h^2} + \frac{u_i}{50}$*. Det ekvationssystem som ska lösas i första Newton-steget är därför* $J(\mathbf{u}^0)\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{u}^0)$*, där*

$$J(\mathbf{u}^0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \frac{u_1^0}{50} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{u_2^0}{50} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{u_3^0}{50} \end{pmatrix}$$

Startgissningen $\mathbf{u}^0$ *kan t.ex. väljas som punktvärdena av funktionen* $v(x)$ *som löser den linjära ekvationen* $-v''(x) = x^2, \quad v(0) = 0, v(1) = 2,$ *dvs.* $v(x) = -x^4/12 + 25x/12$*.*

2. (12p) Formulera och bevisa en sats om kvadratisk konvergens av Newtons metod för att lösa $f(x) = 0$, där f är en skalärvärd funktion.

Se Teorem 1.11 i Sauer.

3a. (7p) Hastigheten hos en golfboll som slås med underskruv lyder differentialekvationerna

$$\begin{aligned} u'(t) &= -R\,V(t)u(t) - C\,v(t), \\ v'(t) &= -g - R\,V(t)v(t) + C\,u(t). \end{aligned}$$

Hastighetens komposant i horisontell led ges av $u(t)$, och komposanten i vertikal led ges av $v(t)$. Längden av hastighetsvektorn ges av $V(t) = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$. Luftmotståndskonstanten $R = 6 \cdot 10^{-4}$ (enhet m^{-1}), tyngdaccelerationen $g = 9.82$ (enhet m/s^2) och konstanten för den så kallade Magnus-effekten $C = 0.13$ (enhet s^{-1}). Bollens går rakt i horisontalplanet, dvs. $u(t) = x'(t)$ och $v(t) = y'(t)$, där $x(t)$ och $y(t)$ är bollens koordinater i horisontell respektive vertikal led.

Skriv ett Matlab-program som med hjälp av Eulers metod bestämmer längden av ett golfslag och skriver ut den på skärmen. Utslagshastigheten $V(0)$ är 60 m/s, och utslagsvinkeln mot horisontalplanet $\pi/10$ radianer. Nedslagspunkten är i en bunker, dvs. bollen studsar inte vidare efter nedslaget. Bunkern befinner sig på samma höjd som utslagspunkten.

3b. (7p) Skriv ett Matlab-program som med hjälp av Eulers metod beräknar den tid det tar från utslagstidpunkten tills golfbollen når bollbanans högsta punkt.

3a. Vi har följande system av differentialekvationer

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= u(t), \\
u'(t) &= -R\,V(t)u(t) - C\,v(t), \\
y'(t) &= v(t), \\
v'(t) &= -g - R\,V(t)v(t) + C\,u(t).
\end{aligned}
$$

Vi väljer koordinatsystem så att utslagspunkten är i punkten $(x, y) = (0, 0)$*. Vi har därför följande begynnelsevillkor:* $x(0) = 0$, $u(0) = 60\cos(\pi/10)$, $y(0) = 0$, $v(0) = 60\sin(\pi/10)$. *Matlab-programmet nedan beräknar Euler-lösningen till systemet av differentialekvationer tills y-koordinaten blir negativ, dvs. tills bollen slår i backen.*

```
R=6e-4;
C=0.13;
g=9.82;
vinit=60;
alpha=pi/10;
h=0.01;

z=[0; vinit*cos(alpha); 0; vinit*sin(alpha)];   %Initialisering
while z(3)>=0
    z=z+h*[z(2); -R*sqrt(z(2)^2+z(4)^2)*z(2)-C*z(4);...
        z(4); -g-R*sqrt(z(2)^2+z(4)^2)*z(4)+C*z(2)];
end

disp(['Golfslagets langd= ',num2str(z(1))])
```

3b. Denna kod är en blygsam förändring av koden i uppgift 3a.

```
R=6e-4;
C=0.13;
g=9.82;
vinit=60;
alpha=pi/10;
h=0.01;
n=0;

z=[0; vinit*cos(alpha); 0; vinit*sin(alpha)];   %Initialisering
while z(4)>=0
    z=z+h*[z(2); -R*sqrt(z(2)^2+z(4)^2)*z(2)-C*z(4);...
        z(4); -g-R*sqrt(z(2)^2+z(4)^2)*z(4)+C*z(2)];
    n=n+1;
```

```
end

disp(['Tid till bollens hogsta punkt= ',num2str(n*h)])
```