

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1513, SF1514, SF1518, SF1519, SF1541, SF1543 14.00-17.00 18/12 2018

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

1a. (5p) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + xu(x) &= x^2, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u(1) = 2, \end{aligned} \tag{A}$$

ska lösas med hjälp av finita differensmetoden. Skriv upp det linjära ekvationssystem som ska lösas om den konstanta steglängden $h = 1/4$ används.

1b. (7p) Skriv ett Matlab-program som beräknar finita differenslösningen till randvärdesproblemet (A) med konstant steglängd $h = 1/100$. Programmet ska skriva ut den beräknade approximationen av $u(1/2)$ på skärmen.

1c. (7p) Skriv ett Matlab-program som beräknar finita differenslösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + xu(x) &= x^2, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u'(1) = 2, \end{aligned}$$

dvs. samma ekvation som tidigare fast med ändrat randvillkor. Programmet ska använda steglängden $h = 1/100$ och skriva ut den beräknade approximationen av $u(1/2)$ på skärmen.

1d. (5p) Vi betraktar nu ett icke-linjärt randvärdesproblem,

$$\begin{aligned} -u''(x) + \frac{(u(x))^2}{100} &= x^2, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u(1) = 2. \end{aligned}$$

Lösningen till detta kan approximeras med finita differensmetoden tillsammans med Newtons metod. Antag att vi vill finna lösningen med steglängden $h = 1/4$. Bestäm en rimlig startgissning till Newtons metod, och skriv upp det linjära ekvationssystem som ska lösas i första Newton-steget.

Vänd!

- 2.** (12p) Formulera och bevisa en sats om kvadratisk konvergens av Newtons metod för att lösa $f(x) = 0$, där f är en skalärvärd funktion.

- 3a.** (7p) Hastigheten hos en golfboll som slås med underskriv lyder differentialekvationerna

$$\begin{aligned}u'(t) &= -R V(t)u(t) - C v(t), \\v'(t) &= -g - R V(t)v(t) + C u(t).\end{aligned}$$

Hastighetens komposant i horisontell led ges av $u(t)$, och komponenten i vertikal led ges av $v(t)$. Längden av hastighetsvektorn ges av $V(t) = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$. Luftmotståndskonstanten $R = 6 \cdot 10^{-4}$ (enhet m^{-1}), tyngdaccelerationen $g = 9.82$ (enhet m/s^2) och konstanten för den så kallade Magnus-effekten $C = 0.13$ (enhet s^{-1}). Bollens går rakt i horisontalplanet, dvs. $u(t) = x'(t)$ och $v(t) = y'(t)$, där $x(t)$ och $y(t)$ är bollens koordinater i horisontell respektive vertikal led.

Skriv ett Matlab-program som med hjälp av Eulers metod bestämmer längden av ett golfslag och skriver ut den på skärmen. Utslagshastigheten $V(0)$ är 60 m/s , och utslagsvinkeln mot horisontalplanet $\pi/10$ radianer. Nedslagspunkten är i en bunker, dvs. bollen studsar inte vidare efter nedslaget. Bunkern befinner sig på samma höjd som utslagspunkten.

- 3b.** (7p) Skriv ett Matlab-program som med hjälp av Eulers metod beräknar den tid det tar från utslagstidpunkten tills golfbollen når bollbanans högsta punkt.