

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1514/18/19

8.00-11.00 26/10 2018

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

- 1a. (7p) Bestäm det andragradspolynom $y = p(x)$ som passerar de tre punkterna med koordinater $(-1, 0)$, $(1, 4)$ och $(2, -3)$.
- 1b. (7p) Bestäm ett tredjegradspolynom $y = q(x)$ som passerar de tre punkterna, samt uppfyller

$$\left(\frac{q'''(2)}{6}\right)^2 + q'(1) + 1 = 0.$$

Tips: Använd Newtons ansats.

1a. Newtons ansats för andragradspolynomet ges av

$$p(x) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)(x - 1).$$

Insättning av de tre punkterna i polynomet ger

$$p(-1) = a_0 = 0,$$

$$p(1) = a_0 + 2a_1 = 4,$$

$$p(2) = a_0 + 3a_1 + 3a_2 = -3,$$

vilket ger ett ekvationssystem som enkelt kan lösas en ekvation i taget. Det ger $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$.

1b. Newtons ansats av ett tredjegradspolynom som passerar de tre punkterna ges av

$$q(x) = p(x) + c(x + 1)(x - 1)(x - 2),$$

där p är polynomet från 1a. Eftersom $p(x)$ passerar genom de tre givna punkterna, och tredjegradstermen $c(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ är noll för $x = -1$, $x = 1$ och $x = 2$ för alla värden på c , så följer det att också $q(x)$ passerar de tre punkterna. Genom att derivera uttrycket för q får vi att $q'''(2) = 6c$ och $q'(1) = -4 - 2c$. Vi erhåller därmed följande ekvation för c :

$$\left(\frac{q'''(2)}{6}\right)^2 + q'(1) + 1 = c^2 - 2c - 3 = 0,$$

som har lösningarna $c = -1$ och $c = 3$. Båda dessa värden på c ger korrekta tredjegradspolynom q .

2. (8p) Genomför ett steg med Gauss-Newtons metod och startvärdet $(x, y) = (1, 0)$ för att approximera minstakvadratlösningen till ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\x + y^3 &= 1.1, \\x + \sin y &= 1.\end{aligned}$$

2. Minstakvadratlösningen till ekvationssystemet är detsamma som minimeraren

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

av Euklidiska normen av funktionen

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x + y^3 - 1.1 \\ x + \sin y - 1 \end{pmatrix}.$$

Ett steg med Gauss-Newtons metod ges av $\mathbf{z}^1 = \mathbf{z}^0 - \mathbf{h}$, där $\mathbf{h}$ är minstakvadratlösningen av det överbestämda linjära ekvationssystemet $J(\mathbf{z}^0)\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{z}^0)$, och J är Jacobimatrisen till $\mathbf{f}$. Med insättning av startvektorn

$$\mathbf{z}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$J(\mathbf{z}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen av ekvationssystemet $J(\mathbf{z}^0)\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{z}^0)$ ges av lösningen till normalekvationerna $J(\mathbf{z}^0)^T J(\mathbf{z}^0)\mathbf{h} = J(\mathbf{z}^0)^T \mathbf{f}(\mathbf{z}^0)$, vilka på komponentform ges av

$$\begin{aligned}6h_1 + h_2 &= -0.1, \\h_1 + h_2 &= 0,\end{aligned}$$

med lösning $h_1 = -0.02$, $h_2 = 0.02$. Approximationen efter ett steg med Gauss-Newton ges därför av $(x, y) = (1.02, -0.02)$.

- 3a.** (7p) Bestäm vilken/vilka av rötterna till ekvationen $x^3 - x = 0$ som fixpunktsiterationerna $x_{n+1} = x_n^3$ kan konvergera till för startpunkter x_0 i något öppet intervall runt respektive rot.
- 3b.** (6p) För varje rot i uppgift 3a som fixpunktsmetoden kan konvergera till, bestäm ett intervall sådant att om startpunkten x_0 väljs inom intervallet, så kommer fixpunktsiterationen att konvergera till den aktuella roten.

3a. Enligt Sats 1.6 i kapitel 1.2.3 i Sauer konvergerar fixpunktsmetoden lokalt mot en lösning α om $|g'(\alpha)| < 1$ där g är högerledsfunktionen $g(x) = x^3$. Av de tre lösningarna $x = -1$, $x = 0$ och $x = 1$ kan alltså fixpunktsmetoden endast konvergera till $x = 0$.

3b. Alternativ 1: Enligt beviset av Sats 1.6 i kapitel 1.2.3 i Sauer gäller det att

$$x_{n+1} - \alpha = g'(c)(x_n - \alpha)$$

för någon punkt c mellan x_n och fixpunkten α . Om vi betraktar fixpunkten $\alpha = 0$ gäller det alltså att

$$x_{n+1} = 3c^2 x_n.$$

Om vi alltså t.ex. väljer x_0 i intervallet $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ kommer $|x_{n+1}| \leq 1/2|x_n|$, vilket leder till att $|x_n| \leq |x_0|/2^n$, dvs. vi har konvergens. (I själva verket kan man med denna metod se att $|x_0| \leq 1/\sqrt{3}$ leder till konvergens.)

Alternativ 2: Eftersom $x_{n+1} = x_n^3 = x_n^2 \cdot x_n$ följer det på samma sätt som i alternativ 1 att vi har konvergens om $|x_0| \leq 1/\sqrt{2}$. (I själva verket kan man med denna metod se att $|x_0| < 1$ leder till konvergens.)

- 4.** (15p) Antalet rävar och kaniner på en ö beskrivs av differentialekvationerna

$$x'(t) = -0.1x(t) + 0.02x(t)y(t),$$

$$y'(t) = 0.2y(t) - 0.025x(t)y(t),$$

där $x(t)$ är antalet rävar i tusental vid tiden t (veckor), och $y(t)$ motsvarande antal kaniner. Om startvärdena är $x(0) = 6$ och $y(0) = 4$ så kommer efter ett tag antalet kaniner att vara större än antalet rävar. Skriv ett Matlabprogram som med hjälp av Eulers metod och steglängd $h = 0.01$ beräknar en approximativ lösning av systemet av differentialekvationer fram till det tidssteg då antalet kaniner är större än, eller lika med, antalet rävar. Programmet ska skriva ut antalet kaniner (som kommer att vara ungefär lika stort som antalet rävar) vid detta avslutande tidssteg.

4

4.

```
dt=0.01;
x=6; y=4;
while x>y
    xold=x; yold=y;
    x=xold+dt*(-0.1*xold+0.02*xold*yold);
    y=yold+dt*(0.2*yold-0.025*xold*yold);
end
disp(['Antal rvar: ',num2str(y),' tusen.'])
```