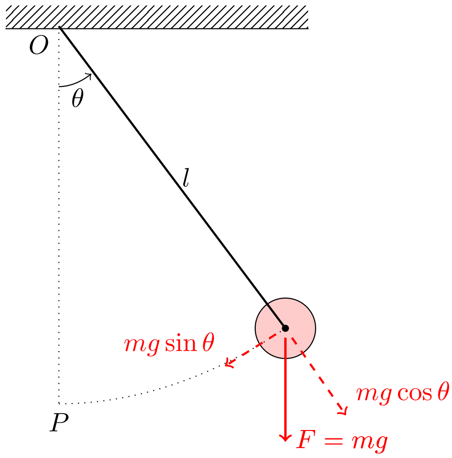
# Laboration 3

Laborationen skall lösas i grupper om två och redovisas med en rapport som lämnas senast 16 oktober klockan 15 i Matematiks svarta postlåda (märkt SF) framför expeditionen på Teknikringen 8D. Se kurshemsidan för ytterligare information om rapportens utformning.

## 1 Matematisk pendel

En pendel bestående av en upphängning av längd $l$ och en massa $m$ svänger i ett plan enligt Figur 1. Om




Figur 1: En pendel av längd $l$ och massa $m$.

pendelns massa antas vara punktformad och den är upphängd i en oelastisk tråd brukar den betecknas som en matematisk pendel, och dess utslagsvinkel ges då av den icke-linjära differentialekvationen

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\sin\theta = 0, \tag{1}$$

där $\theta(t)$ är utslagsvinkeln och $g$ är tyngdaccelerationen. Om pendeln har begynnelsevillkoren

$$\theta(0) = \theta_0, \qquad \theta'(0) = 0,$$

d v s att den släpps från en vinkel $\theta_0$, får svängningen periodtiden

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}I(\theta_0), \tag{2}$$

där

$$I(\theta_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}, \qquad k = \sin\frac{\theta_0}{2}. \tag{3}$$

Låt $l$=0.5 m och $g$=9.82 m/s$^2$. (*Notera:* Pendelns massa påverkar inte periodtiden $T$.)

**a)** Beräkna periodtiden $T$ för $\theta_0$ motsvarande $5, 10, \ldots, 90$ grader med hjälp av trapetsmetoden och gör en tabell över periodtiden för dessa vinklar. Periodtiderna ska ha tio siffrors noggrannhet. *Notera:* I ekvation (3) ges vinklarna i radianer, precis som i MATLAB:s inbyggda trigonometriska funktioner.

**b)** För små vinklar kan man utnyttja linjäriseringen $\sin\theta \approx \theta$, vilken ger periodtiden

$$\tilde{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

för det linjäriserade problemet. För vilka vinklar i tabellen är det relativa felet $\frac{|T-\tilde{T}|}{T}$ mindre än en procent? Mindre än tio procent?

**c)** Inför en ny variabel $\nu(t) = \theta'(t)$ och skriv ekvation (1) som ett system av två första ordningens differentialekvationer. Låt begynnelsevillkoret vara $\theta_0$=25° och lös problemet med Runge-Kuttas metod med steglängd $h = 0.1$ på intervallet $t \in [0, 2]$. Upprepa för $\theta_0$=50° och plotta $\theta$ som en funktion av $t$ för de båda begynnelsevärdena. Verifiera grafiskt att periodtiderna från **a)** överensstämmer med simuleringarna.

**d)** För att noggrant bestämma periodtiden från simuleringen i **c)** kan man hitta tidpunkten när pendeln vänder, vilket motsvarar första tidpunkt $t > 0$ för vilken $\nu(t) = 0$. Periodtiden $T$ är då två gånger denna tid. Bestäm periodtiden genom att använda linjär interpolation mellan punkterna $(t_i, \nu_i)$ och $(t_{i+1}, \nu_{i+1})$ för att bestämma skärningspunten med $t$-axeln. Tidpunkten $t_i$ är här den sista tiden i Runge-Kutta-lösningen innan $\nu$ växlar tecken, dvs. $\nu_i < 0$ och $\nu_{i+1} > 0$. Matlab-kommandot `find` kan vara användbart. Matlab-raden `i=find(v>0,1)` hittar t.ex. index på första positiva elementet i vektorn `v`. För $\theta_0$=25° och några värden på $h$, exempelvis $h = 0.1$, 0.05, 0.025, 0.0125, ..., bestäm approximationer av $T$ med denna metod och beräkna felet i dessa approximationer genom att jämföra med resultaten från **a)**. Plotta felet mot steglängden $h$. Hur litet $h$ krävs för att det relativa felet ska vara mindre än en $10^{-5}$? Hur avtar felet med $h$?

**e)** Upprepa uppgift **d)** fast med MATLAB:s inbyggda funktion `ode45`.