

SF1514/18/19 Övning 1

Intervallhalvering, Newtons metod, fixpunktsmetoden

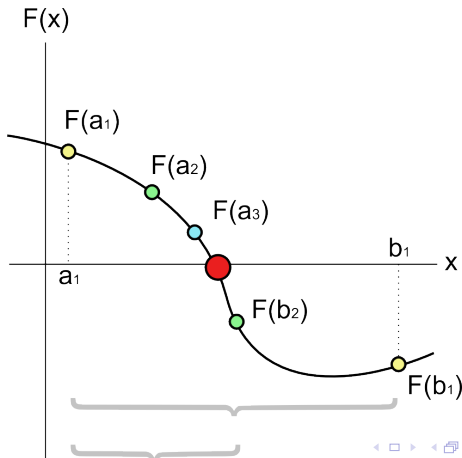
Hanna Gustavsson, hagusta@kth.se

September 17, 2018

Intervallhalvering Sauer Ex. 1.1.5

Givet ekvationen $x^4 = x^3 + 10$.

- Hitta ett intervall $[a, b]$ med längd ett i vilket ekvationen har en lösning.
- Börja med $[a, b]$, hur många steg med intervallhalveringsmetoden behövs roten ska finnas inom ett intervall på 10^{-10} ?



Men först...

- Vad är konvergens?
 - Hur snabbt en följd konvergerar (exempelvis ett fel)
- Vilken konvergensordning har Newton Raphsons metod?
- Kan man förvänta sig att NR alltid konvergerar?

Funktionen $x^5 + x = 1$ har en reell rot. Beräkna denna med 8 säkra decimaler.

Theorem 1.11 (Sauer)

Låt f vara en två gånger, kontinuerlig differentierbar och att $f(r) = 0$. Om $f'(r) \neq 0$ så konvergerar metoden kvadratisk om

$$\frac{e_{i+1}}{e_i^2} \approx \text{konstant}$$

Där e_i är felet i steg i .

- Fördel: Behöver ingen derivata
- Konvergens: Linjär (så långsammare än Newton)
- Konvergerar den alltid?

Fixpunktsmetoden, exempel

Ide: Man vill lösa en ekvation på formen $f(x) = 0$ genom att skriva om som $x = g(x)$ där man itererar genom $x_{n+1} = g(x_n)$

Def 1.4 (Sauer)

Det reella talet α är en fixpunkt till g om $g(\alpha) = \alpha$.

Theorem 1.6 (Sauer) VIKTIGT!!!

Anta att g är kontinuerligt differentierbar, att $g(\alpha) = \alpha$ och att $S = |g'(\alpha)| < 1$. Då konvergerar Fixpunktsmetoden linjärt.

Dvs, ingen konvergens om Theorem 1.6 inte är uppfyllt.

Vilka/vilken fixpunktsiteration konvergerar till roten $\sqrt{5}$

- ❶ $g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{x}$
- ❷ $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x}$
- ❸ Både 1 och 2.

Ex 2.15 Exempelsamling

Vill hitta $x^2 - 3x + 1 = 0 = f(x)$ med hjälp av fixpunktsiterationen $g(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$.

Hur går man til väga stegvis?

- 1 Plotta funktionen $f(x)$ och hitta vart rötterna finns på ett ungefär.
- 2 Kontrollera att rötterna konvergerar med den givna fixpunktsiterationen! Hur kollar man detta?
- 3 Iterera så länge felet är större än toleransen. Felet är $|x_n - x_{n-1}|$

Newtons metod för system av ekvationer

Ungefär samma utförande som Newton-Raphsons metod. Men..

- $x_{n+1} = x_n - Df(x) \backslash f(x)$
- Notera här att x är en vektor, och vad blir 'derivatan' Df i flervariabelsfallet?
- Vilken konvergensordning?

Beräkna någon lösning till ekvationssystemet.

$$\begin{aligned}10^5 x - 2 * 10^4 y - 10^4 x^3 &= 0 \\ 10^6 + 10^7 y + 5 * 10^6 y^2 &= 3 * 10^6\end{aligned}$$