

SF1514/18/19

Erik Dalsryd och Mattias Sandberg

Institutionen för matematik
KTH

13 september 2018

Ekvationer $f(x) = 0$.

- Intervallhalveringsmetoden
- Newtons metod
- Sekantmetoden
- Fixpunktsmetoden

Ekvationer $f(x) = 0$.

- Intervallhalveringsmetoden
- Newtons metod
- Sekantmetoden
- Fixpunktsmetoden

Ekvationer $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ genom Newtons metod.

Metod att lösa $f(x) = 0$.

- 1 Finn startgissning x_0 .
- 2 För $n = 0, 1, 2, \dots$ låt $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- 3 Avbryt när $|x_n - x_{n-1}|$ tillräckligt litet.

Sats (Kvadratisk konvergenshastighet för Newton)

Antag att f är två gånger kontinuerligt deriverbar, och $f'(\alpha) = 0$, där $f(\alpha) = 0$. Då finns en omgivning av α sådan att om startpunkten x_0 ligger i denna omgivning så konvergerar Newtons metod, dvs. $x_n \rightarrow \alpha$. Dessutom gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = K,$$

där

$$K = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Metod för lösning av ekvationer på formen $x = g(x)$. Om $\alpha = g(\alpha)$ så kallas α en fixpunkt.

Fixpunktsiteration: $x_{n+1} = g(x_n)$.

Fråga från förra föreläsningen

Vilka av följande ekvationer är ekvivalenta med ekvationen $x^3 + 2x + 2 = 0$?

① $x = x^3 + 3x + 2$

② $x = \frac{x^3+2}{2}$

③ $x = -\frac{x^3+2}{2}$

④ $x = \sqrt[3]{-2x-2}$

- A. Alla
- B. Endast 1
- C. Endast 4
- D. Alla utom 2
- E. Alla utom 3
- F. Ingen

Två varianter av fixpunktsiteration

$x_{n+1} = -\frac{x_n^3 + 2}{2}$	
n	x_n
0	-1
1	-0.5
2	-0.9375
3	-0.5880
4	-0.8983
5	-0.6375
6	-0.8705
7	-0.6702

$x_{n+1} = x_n^3 + 3x_n + 2$	
n	x_n
0	-1
1	-2
2	-12
3	-1762
4	-5.5e9
5	-1.6e29
6	-4.4e87
7	-8.4e262

Konvergens av fixpunktsmetoden

Sats Antag att derivatan av f är kontinuerlig.

Om $|g'(\alpha)| < 1$ konvergerar fixpunktsmetoden $x_{n+1} = g(x_n)$ till α om startpunkten x_0 väljs tillräckligt nära α .

Om $|g'(\alpha)| > 1$ och $x_0 \neq \alpha$ kan fixpunktsmetoden $x_{n+1} = g(x_n)$ inte konvergera till α . ■

Konvergens av fixpunktsmetoden

Sats Antag att derivatan av f är kontinuerlig.

Om $|g'(\alpha)| < 1$ konvergerar fixpunktsmetoden $x_{n+1} = g(x_n)$ till α om startpunkten x_0 väljs tillräckligt nära α .

Om $|g'(\alpha)| > 1$ och $x_0 \neq \alpha$ kan fixpunktsmetoden $x_{n+1} = g(x_n)$ inte konvergera till α . ■

Beviset använder följande sats:

Medelvårdessatsen. Om g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Kan man hitta lösningen $x = 1$ till ekvationen

$$x = \frac{4x}{x^2 + 3}$$

genom fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ där

$$g(x) = \frac{4x}{x^2 + 3}?$$

I så fall, hur många iterationssteg krävs för att reducera felet en faktor 10^3 ?

Liknar Newtons metod, fast utan derivataberäkning:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

Notera att *två* startgissningar, x_0 och x_1 , behövs.

Sekantmetoden har konvergensordning

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62.$$