Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1513, SF1514, SF1518, SF1519, SF1541, SF1543
14.00-17.00 19/12 2017

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

1. En dämpad pendel beskrivs av ekvationen

$$ml\theta''(t) + k\theta'(t) + mg\sin\theta(t) = 0, \quad \theta(0) = \pi/4, \ \theta'(0) = 0, \tag{A}$$

där $\theta(t)$ är pendelns vinkel vid tiden t mot lodlinjen, m är massan, l längden, g tyngdaccelerationen och k en friktionskonstant.

1a. (4p) Skriv om ekvation (A) som ett system av första ordningens differentialekvationer.

1b. (12p) Skriv en Matlab-funktion som med ditt eget val av numerisk metod beräknar en lösning till svängningsekvationen (A). Indata till funktionen ska vara friktionsparametern k, och utdata en approximation av lösningen efter tiden 5 sekunder, dvs. $\theta(5)$. De övriga konstanterna i (A) sätts till $m = 2$, $l = 1/2$, $g = 9.82$. För full poäng på denna uppgift krävs att funktionen ger en approximation av $\theta(5)$ med ett fel vars absolutbelopp är maximalt 10^{-4}. Uppfylls inte detta noggrannhetskrav kan uppgiften ändå ge några poäng.

1c. (4p) Beroende på värdet av dämpningsparametern k får lösningen vid tiden $t = 5$ olika värden. Kalla detta beroende $F(k)$, dvs. $\theta(5) = F(k)$. Skriv en Matlab-kod som beräknar en numerisk approximation av derivatan $F'(1/10)$. Din kod får använda Matlab-funktionen från uppgift 1b.

1a. Låt $\nu(t) = \theta'(t)$ och $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \nu(t) \end{pmatrix}$. Då kan differentialekvationen skrivas

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} \nu(t) \\ -\frac{g}{l}\sin\theta(t) - \frac{k}{ml}\nu(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1b. Eulers metod används: $\mathbf{y}^{i+1} = \mathbf{y}^i + h\mathbf{f}(\mathbf{y}^i)$*. Följande Matlab-kod finner en approximation av* $\theta(5)$ *med önskad noggrannhet:*

```
function  svar= uppg1b(k)

%Parametervrden:
m=2; l=1/2; g=9.82;

N=50; %Initialt antal tidssteg. Ger h=0.1;
theta5old=0; %Initialisering
theta5new=100; %Initialisering

while abs(theta5new-theta5old)>1e-4
    h=5/N;  %Steglngd
    y=[pi/4;0]; %Startkoordinater
    for i=1:N
        y=y+h*[y(2); -g/l*sin(y(1))-k/m/l*y(2)];    %Eulers metod
    end
    theta5old=theta5new;
    theta5new=y(1);
    N=2*N;  %Dubblera antalet steg
end
svar=theta5new;
end
```

1c. Derivatan kan approximeras med centraldifferens:

```
dk=0.01;
derivataapprox=(uppg1b(0.1+dk)-uppg1b(0.1-dk))/(2*dk)
```

2. (10p) Med parametern $a = 1$ ges en lösning till ekvationen

$$a^2 e^{\sin x} - \cos ax = 0$$

av $x = 0$. Om $\tilde{a} \approx a$ finns det en lösning $\tilde{x}$ till ekvationen

$$\tilde{a}^2 e^{\sin x} - \cos \tilde{a}x = 0,$$

som är nära $x = 0$. Bestäm genom att använda linjärisering en approximativ gräns på hur stort felet $|\tilde{x} - x|$ kan vara om vi vet att störningen i parametern a uppfyller $|\tilde{a} - a| \leq 10^{-3}$.

2. Introducera funktionen $f(x,a) = a^2 e^{\sin x} - \cos ax$. Enligt uppgiften ges en lösning till ekvationen $f(x,a) = 0$ av $(x,a) = (0,1)$. Om $(\tilde{x},\tilde{a})$ är en annan lösning, dvs. $f(\tilde{x},\tilde{a}) = 0$, så ger första ordningens Taylorapproximation runt $(x,a) = (0,1)$ att

$$0 = f(\tilde{x},\tilde{a}) \approx f(x,a) + f'_x(\tilde{x} - x) + f'_a(\tilde{a} - a).$$

De partiella derivatorna ska beräknas i punkten $(x,a) = (0,1)$, vilket ger $f'_x = 1$ och $f'_a = 2$. Eftersom dessutom $f(x,a) = 0$ så följer det att

$$\tilde{x} - x \approx -2(\tilde{a} - a).$$

Så med den givna felgränsen $|\tilde{a} - a| \leq 10^{-3}$ följer att felet $|\tilde{x} - x|$ approximativt uppfyller $|\tilde{x} - x| \leq 2 \cdot 10^{-3}$.

3. (10p) Skriv ett Matlabprogram som hittar en approximativ lösning z till ekvationen

$$\int_1^z e^{\cos x}\, dx = \int_z^5 e^{\cos x}\, dx.$$

Programmet ska använda någon av metoderna intervallhalvering, sekantmetoden eller Newtons metod. Den numeriska approximationen av integralerna ska göras med en numerisk metod som använder en steglängd som maximalt får vara 0.01.

3. Låt funktionen f vara definierad av $f(z) = \int_1^z e^{\cos x}\, dx - \int_z^5 e^{\cos x}\, dx$. Eftersom f är kontinuerlig och $f(1) < 0$ och $f(5) > 0$ så finns det en lösning till $f(z) = 0$ på intervallet $(1,5)$. Matlabprogrammet nedan utför intervallhalveringsmetoden för lösning av $f(z) = 0$. Integralerna från 1 till z, respektive z till 5 beräknas med trapetsmetoden. Antal steg som används för beräkningen av båda integralerna sätts till 10^3, vilket säkerställer att steglängden i båda integralerna kommer att vara mindre än 0.01.

```
a=1; b=5;   %Begynnelseintervall intervallhalveringsmetoden
fa=-1; fb=1;    %Funktionens tecken knt vid a och b.
TOL=1e-3;   %Tolerans fr intervallhalveringsmetoden
Nint=1e3;   %Antal delintervall fr trapetsmetoden p intervallen
            %[1,m] respektive [m,5].

while b-a>2*TOL
    m=(a+b)/2;
    dx1=(m-a)/Nint;
    dx2=(b-m)/Nint;
    x1=1:dx1:m; %Berkningspunkter fr vnstra integralen
    x2=m:dx2:5; %Berkningspunkter fr hgra integralen
```

```
    Trap1=dx1*(exp(cos(x1(1)))/2+sum(exp(cos(x1(2:end-1))))+exp(cos(x1(end)))/2);
    Trap2=dx2*(exp(cos(x2(1)))/2+sum(exp(cos(x2(2:end-1))))+exp(cos(x2(end)))/2);
    fm=Trap1-Trap2;
    if fm*fa>0
        a=m;
    else
        b=m;
    end
end
disp(['En approximation av lsningen ges av z=',num2str((a+b/2))]);
```

4. (10p) Genomför för hand ett steg med Newtons metod för ekvationssystemet

$$x^2 + e^y = 2,$$

$$\cos y = x - \frac{1}{2},$$

från startpositionen $(x, y) = (1, 0)$.

4. Vi låter $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *och* $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} x^2 + e^y - 2 \\ \cos y - x + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Jacobianen till* $\mathbf{F}$ *ges av*

$$J = \begin{bmatrix} 2x & e^y \\ -1 & -\sin y \end{bmatrix}.$$

Startpositionen är $\mathbf{z}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, *och ett steg med Newtons metod ges av* $\mathbf{z}^1 = \mathbf{z}^0 - \mathbf{h}^0$, *där* $\mathbf{h}^0$ *löser* $J(\mathbf{z}^0)\mathbf{h}^0 = \mathbf{F}(\mathbf{z}^0)$. *Eftersom*

$$J(\mathbf{z}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

får vi $\mathbf{h}^0 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, *och därmed lösningen efter ett Newton-steg:* $\mathbf{z}^1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$.