

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1514/18/19

8.00-11.00 27/10 2017

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

- 1a.** (10p) Bestäm det förstegradspolynom $y = p(x)$ som i minstakvadratmening anpassar de tre punkterna med koordinater $(-1, 2)$, $(1, 3)$ och $(3, 6)$.
- 1b.** (5p) Vi antar nu att man vet att det första mätvärdet $(-1, 2)$ är mycket noggrant. Bestäm därför det förstegradspolynom $q(x)$ vars graf passerar genom $(-1, 2)$ samtidigt som det anpassar till de båda andra punkterna $(1, 3)$ och $(3, 6)$ i minstakvadratmening.

1a. Låt polynomet p ges av $p(x) = kx + m$. Anpassning av polynomet till de givna punkterna ger det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen till det överbestämda ekvationssystemet ges som lösningen till normalekvationen $A^T A\mathbf{z} = A^T \mathbf{b}$. Matrisen och högerledsvektorn i normalekvationen ges av

$$A^T A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Vi får att lösningen till normalekvationen ges av $k = 1$ och $m = 8/3$, så att rätt svar i uppgift 1a är $p(x) = x + 8/3$.

1b. Alla förstegradspolynom vars graf passerar genom punkten $(-1, 2)$ ges av $q(x) = kx + k + 2$, för någon konstant k . Om polynom på denna form ska anpassa till de båda andra punkterna erhålls ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1

Notera att detta överbestämda ekvationssystem endast har en obekant, dvs. k , och en systemmatris som har dimensionerna 2×1 . Minstakvadratlösningen ges av lösningen till normalekvationen, som ges av

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

dvs. $20k = 18$ med lösning $k = 9/10$. Svaret på uppgift 1b blir alltså $q(x) = 9x/10 + 29/10$.

2. (15p) Funktionen $f(x) = \sin x + e^x$ uppfyller $f(-1) < 0$ och $f(0) > 0$. Ge en Matlab-kod som säkert finner en approximation av en lösning till ekvationen $f(x) = 0$ med ett fel som maximalt får vara 10^{-6} . Motivera tydligt hur du kan vara säker på att din kod kommer att ge svaret med given noggrannhet.

2. Eftersom funktionen f är kontinuerlig och växlar tecken på intervallet $[-1, 0]$ garanterar satsen om mellanliggande värden att det finns en lösning till ekvationen $f(x) = 0$ i intervallet. Dessutom vet vi att intervallhalveringsmetoden kommer att konvergera till en lösning. Följande Matlab-kod finner en approximation med önskad noggrannhet.

```
a=-1; b=0;
TOL=1e-6;
while (b-a)/2>TOL
    m=(a+b)/2;
    if (sin(a)+exp(a))*(sin(m)+exp(m))>0
        a=m;
    else
        b=m;
    end
end
disp(['En approximativ lösning till ekvationen är ', num2str((a+b)/2)])
```

Intervallhalveringsmetoden ger i varje iterationssteg ett successivt mindre intervall $[a, b]$ i vilken en lösning till ekvationen finns. När intervallet är så litet att halva dess längd understiger toleransen vet vi att vi har godtagbar noggrannhet om approximationen tas som mittpunkten av intervallet $[a, b]$, dvs. som $(a + b)/2$.

- 3a.** (14p) Visa hur man kan använda finita differensmetoden för att finna en approximativ lösning till differentialekvationen

$$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3. \quad (\text{A})$$

Gör detta genom att dela in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i fyra lika långa delintervall och ställa upp det linjära ekvationssystem som din finita differens-approximation löser. (Du behöver inte lösa ekvationssystemet, men se till att det har lika många ekvationer som obekanta.)

- 3b.** (6p) Koefficienten framför termen $y(x)$ i (A) modifieras nu lite grann så att den termen blir icke linjär. Det resulterar i ekvationen

$$y''(x) + xy'(x) + (2 + y(x)/10)y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3. \quad (\text{B})$$

Formulera en numerisk metod för detta icke linjära problem.

3a. Intervallet $[0, 1]$ delas in i fyra lika långa delintervall med längd $h = 1/4$. Låt $x_i = ih$, för $i = 0, \dots, 4$, och finit differensapproximationen $y_i \approx y(x_i)$. Vi använder centraldifferenser för att approximera derivatorna:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Med differens-approximationerna insatta i differentialekvationen erhåller vi för varje $i = 1, 2, 3$ en ekvation

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = 0.$$

Denna kan skrivas

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(2 - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right)y_{i+1} = 0.$$

Om vi dessutom använder randvillkoren $y_0 = 1$, $y_4 = 3$, får vi ekvationssystemet $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{x_1}{2h} & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{x_2}{2h} & 2 - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{x_2}{2h} \\ 0 & \frac{1}{h^2} + \frac{x_3}{2h} & 2 - \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \left(\frac{x_1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right)y_0 \\ 0 \\ -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{x_3}{2h}\right)y_4 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\mathbf{y}$ innehåller de sökta storheterna, och högerledsvektorn $\mathbf{b}$ innehåller kända siffervärden.

3b. När finita differensmetoden och fyra delintervall används på det icke linjära randvärdesproblemet (B) erhålls på samma sätt som i uppgift 3a tre ekvationer som hänger samman med de tre diskretiseringspunkterna x_1 , x_2 och x_3 . Nu blir dessa ekvationer icke linjära. Det resulterande

ekvationssystemet kan skrivas $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, där funktionen

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ f_2(\mathbf{y}) \\ f_3(\mathbf{y}) \end{bmatrix},$$

och komponent i ges av

$$f_i(\mathbf{y}) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + (2 + y_i/10)y_i.$$

Det används här att randvillkoren är kända, så att $y_0 = 1$ och $y_4 = 3$. Newtons metod för att lösa ekvationssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ ges av

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n - \mathbf{h}^n,$$

där steglängdsvektorn $\mathbf{h}^n$ löser ekvationssystemet $J(\mathbf{y}^n)\mathbf{h}^n = \mathbf{f}(\mathbf{y}^n)$ och $J(\mathbf{y}^n)$ är Jacobimatrisen av $\mathbf{f}$ beräknad i punkten $\mathbf{y}^n$. Jacobimatrisen ges av följande uttryck:

$$J(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{2}{h^2} + \frac{y_1}{5} & \frac{1}{h^2} + \frac{x_1}{2h} & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{x_2}{2h} & 2 - \frac{2}{h^2} + \frac{y_2}{5} & \frac{1}{h^2} + \frac{x_2}{2h} \\ 0 & \frac{1}{h^2} + \frac{x_3}{2h} & 2 - \frac{2}{h^2} + \frac{y_3}{5} \end{bmatrix}.$$

Eftersom ekvation (B) skiljer sig från (A) med en liten term väljer vi som startpunkt för Newtons metod lösningen till ekvationssystemet $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ från uppgift 3a.