

Lappskrivning 2: Lösningsförslag

Fredag 17 feb 2017 15:15-16:45

SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Max: 12 poäng

Version A

1. (4 poäng) Bestäm maximala värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$ under bivillkoret $x - y = x^2$.

Lösning: Bivillkoret ger att $y = x - x^2$. Genom att sätta in detta uttrycket för y i funktionen f , reducerar vi problemet till följande optimeringsproblem utan bivillkor: Maximera funktionen

$$F(x) := f(x, x - x^2) = (2 - x)x^3$$

över alla $x \in \mathbb{R}$. Vi noterar först att $F(x) \rightarrow -\infty$ då $|x| \rightarrow \infty$. Det följer att $F(x)$ har ett maxvärde på $\mathbb{R}$ och att detta maxvärde antas i en stationär punkt. De stationära punkterna för $F(x)$ bestäms av ekvationen $F'(x) = 2(3 - 2x)x^2 = 0$. Detta ger två stationära punkter: $x = 0$ och $x = 3/2$. Eftersom $F(0) = 0$ och $F(3/2) = 27/16$, ser vi att maxvärdet för F är $27/16$.

Alternativ lösning: Låt $g(x, y) = x - y - x^2$ så att bivillkoret är $g(x, y) = 0$. Eftersom

$$\nabla f = (2x, -2y), \quad \nabla g = (1 - 2x, -1),$$

kan Lagranges ekvation $\nabla f = \lambda \nabla g$ skrivas

$$\begin{cases} 2x = \lambda(1 - 2x), \\ -2y = -\lambda. \end{cases}$$

Genom att eliminera λ ser vi att $y = \frac{x}{1-2x}$. Vi sätter in detta i ekvationen för bivillkoret:

$$x - \frac{x}{1-2x} - x^2 = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{x^2(2x-3)}{1-2x} = 0,$$

vilket ger $x = 0$ eller $x = 3/2$. Det följer att f antar sitt maxvärde under det givna bivillkoret i någon av punkterna $(0, 0)$ eller $(3/2, -3/4)$. Eftersom $f(0, 0) = 0$ och $f(3/2, -3/4) = 27/16$, följer att maxvärdet antas i punkten $(3/2, -3/4)$ och ges av $27/16$.

Svar: $27/16$.

2. (4 poäng) Funktionerna $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieras av

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2, x + y, y^2), \quad \mathbf{g}(x, y) = (y^3, 2x).$$

Bestäm funktionalmatrisen för den sammansatta funktionen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$.

Lösning: Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ beteckna den sammansatta funktionen. Då gäller

$$\mathbf{F}(x, y) = ((y^3)^2, y^3 + 2x, (2x)^2) = (y^6, y^3 + 2x, 4x^2),$$

vilket ger funktionalmatrisen

$$\mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6y^5 \\ 2 & 3y^2 \\ 8x & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ lösning: Eftersom

$$\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

så ger kedjeregeln följande funktionalmatrix för den sammansatta funktionen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(x, y) &= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(x, y))\mathbf{g}'(x, y) = \mathbf{f}'(y^3, 2x)\mathbf{g}'(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} 2y^3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6y^5 \\ 2 & 3y^2 \\ 8x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: $\mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 6y^5 \\ 2 & 3y^2 \\ 8x & 0 \end{pmatrix}$

3. (4 poäng) Bestäm de globala extremvärdena för funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2y$ i området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x \leq 4 - y, y \geq 0\}.$$

Lösning: Vi beräknar

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 4y - 2.$$

Det följer att de stationära punkterna är lösningar till

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 4y - 2 = 0. \end{cases}$$

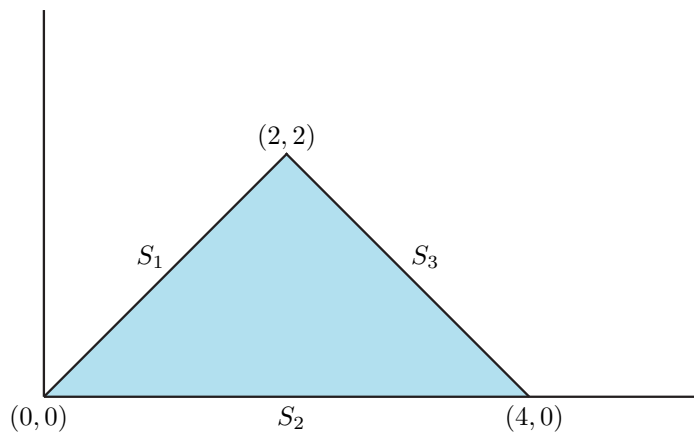
Alltså finns ingen stationär punkt i D (den enda lösningen är $(x, y) = (0, 1/2)$ vilken inte ligger i D).

Området D är en triangel begränsad av de tre sidorna (se Figur 1)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, x) \mid 0 \leq x \leq 2\}, & S_2 &= \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 4\}, \\ S_3 &= \{(4 - y, y) \mid 0 \leq y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Max och min på S_1 . Låt $h_1(x) = f(x, x) = 3x^2 - 2x$, $0 \leq x \leq 2$, vara restriktionen av f till S_1 . Eftersom $h'_1(x) = 6x - 2$, finns det en stationär punkt i $x = 1/3$. Vi har

$$h_1(0) = 0, \quad h_1\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}, \quad h_1(2) = 8,$$



Figur 1 Området D är en triangel med hörn i $(0,0)$, $(4,0)$ och $(2,2)$.

alltså ges max och min värdena för h_1 på $[0,2]$ av 8 och $-\frac{1}{3}$, dvs, max och min värdena för f på S_1 är 8 och $-\frac{1}{3}$.

Max och min på S_2 . Låt $h_2(x) = f(x,0) = x^2$, $0 \leq x \leq 4$, vara restriktionen av f till S_2 . Eftersom $h_2'(x) = 2x$, finns det en stationär punkt i $x = 0$ ($x = 0$ är också en randpunkt). Vi har

$$h_2(0) = 0, \quad h_2(4) = 16,$$

alltså ges max och min värdena för h_2 på $[0,4]$ av 16 och 0, dvs, max och min värdena för f på S_2 är 16 och 0.

Max och min på S_3 . Låt $h_3(y) = f(4-y, y) = 16 - 10y + 3y^2$, $0 \leq y \leq 2$, vara restriktionen av f till S_3 . Eftersom $h_3'(y) = 6y - 10$, finns det en stationär punkt i $y = 5/3$. Vi har

$$h_3(0) = 16, \quad h_3\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{23}{3}, \quad h_3(2) = 8,$$

alltså ges max och min värdena för h_3 på $[0,2]$ av 16 och $\frac{23}{3}$, dvs, max och min värdena för f på S_3 är 16 och $\frac{23}{3}$.

Sammanfattning: Eftersom det inte finns några stationära punkter i det inre av D , så antas extremvärdena för f på randen av D . Det följer att f 's maxvärde på D är 16 (det antas i punkten $(4,0)$) och f 's minvärde på D är $-1/3$ (det antas i punkten $(1/3, 1/3)$).

Svar: maxvärde = 16, minvärde = $-1/3$.