

Lappskrivning 1: Lösningsförslag

Onsdag 7 feb 2018 13:15-14:45

SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Max: 12 poäng

Version A

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} \frac{(y+1)^2 \ln(x/3)}{(x-3)^2 + (y+1)^2}.$$

Lösning: Gränsvärdet existerar och är lika med noll eftersom

$$\left| \frac{(y+1)^2 \ln(x/3)}{(x-3)^2 + (y+1)^2} \right| \leq \frac{(y+1)^2}{(x-3)^2 + (y+1)^2} |\ln(x/3)| \leq |\ln(x/3)| \rightarrow |\ln 1| = 0$$

då $(x, y) \rightarrow (3, -1)$.

Svar: Gränsvärdet existerar och är lika med noll.

2. (4 poäng) Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ antar på kurvan

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

samt i vilka punkter som dessa värden antas.

Lösning: Den givna kurvan är en fjärdedels ellips som kan parametreras enligt

$$(x(t), y(t)) = (3 \cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vi söker alltså största och minsta värdet av funktionen $f(x(t), y(t))$ för t i intervallet $[0, \pi/2]$. Med hjälp av kedjeregeln finner vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -36 \cos t \sin t + 8 \sin t \cos t \\ &= -14 \sin(2t). \end{aligned}$$

[Alternativt kan df/dt beräknas direkt från uttrycket $f(x(t), y(t)) = 18 \cos^2 t + 4 \sin^2 t$.] I intervallet $[0, \pi/2]$ har vi $df/dt = 0$ i punkterna $t = 0$ och $t = \pi/2$. Eftersom

$$f(x(0), y(0)) = f(3, 0) = 18, \quad f(x(\pi/2), y(\pi/2)) = f(0, 2) = 4,$$

drar vi slutsatsen att största värdet är 18 och antas i $(3, 0)$ medan minsta värdet är 4 och antas i $(0, 2)$.

Svar: Största värdet är 18 och antas i $(x, y) = (3, 0)$. Minsta värdet är 4 och antas i $(x, y) = (0, 2)$.

3. (4 poäng) Antag att funktionen $z = z(x, y)$ är implicit definierad nära punkten $(x, y, z) = (2, 3, 2)$ genom ekvationen $F(x, y, z) = xz^4 - yz - 26 = 0$. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $z(x, y)$ i punkten $(x, y) = (2, 3)$ i riktningen $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

Lösning: Vi beräknar

$$F'_x = z^4, \quad F'_y = -z, \quad F'_z = 4xz^3 - y.$$

Alltså gäller

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,3,2)} = - \left. \frac{F'_x}{F'_z} \right|_{(2,3,2)} = - \frac{16}{61}$$

och

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,3,2)} = - \left. \frac{F'_y}{F'_z} \right|_{(2,3,2)} = \frac{2}{61}.$$

Eftersom vektorn $\mathbf{v}$ har längd ett ger detta

$$z'_{\mathbf{v}}(2, 3) = \text{grad } z(2, 3) \cdot \mathbf{v} = \left(-\frac{16}{61}, \frac{2}{61} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 8}{61}.$$

Svar: $z'_{\mathbf{v}}(2, 3) = \frac{\sqrt{3}-8}{61}$.

Version B

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{(y-2)^2 \ln(x/3)}{(x-3)^2 + (y-2)^2}.$$

Lösning: Gränsvärdet existerar och är lika med noll eftersom

$$\left| \frac{(y-2)^2 \ln(x/3)}{(x-3)^2 + (y-2)^2} \right| \leq \frac{(y-2)^2}{(x-3)^2 + (y-2)^2} |\ln(x/3)| \leq |\ln(x/3)| \rightarrow |\ln 1| = 0$$

då $(x, y) \rightarrow (3, 2)$.

Svar: Gränsvärdet existerar och är lika med noll.

2. (4 poäng) Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ antar på kurvan

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

samt i vilka punkter som dessa värden antas.

Lösning: Den givna kurvan är en fjärdedels ellips som kan parametriseras enligt

$$(x(t), y(t)) = (3 \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vi söker alltså största och minsta värdet av funktionen $f(x(t), y(t))$ för t i intervallet $[0, \pi/2]$. Med hjälp av kedjeregeln finner vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -54 \cos t \sin t + 2 \sin t \cos t \\ &= -26 \sin(2t). \end{aligned}$$

[Alternativt kan df/dt beräknas direkt från uttrycket $f(x(t), y(t)) = 27 \cos^2 t + \sin^2 t$.] I intervallet $[0, \pi/2]$ har vi $df/dt = 0$ i punkterna $t = 0$ och $t = \pi/2$. Eftersom

$$f(x(0), y(0)) = f(3, 0) = 27, \quad f(x(\pi/2), y(\pi/2)) = f(0, 1) = 1,$$

drar vi slutsatsen att största värdet är 27 och antas i $(3, 0)$ medan minsta värdet är 1 och antas i $(0, 1)$.

Svar: Största värdet är 27 och antas i $(x, y) = (3, 0)$. Minsta värdet är 1 och antas i $(x, y) = (0, 1)$.

3. (4 poäng) Antag att funktionen $z = z(x, y)$ är implicit definierad nära punkten $(x, y, z) = (2, 3, 2)$ genom ekvationen $F(x, y, z) = xz^4 - yz - 26 = 0$. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $z(x, y)$ i punkten $(x, y) = (2, 3)$ i riktningen $\mathbf{v} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$.

Lösning: Vi beräknar

$$F'_x = z^4, \quad F'_y = -z, \quad F'_z = 4xz^3 - y.$$

Alltså gäller

$$\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{(2,3,2)} = - \frac{F'_x}{F'_z} \bigg|_{(2,3,2)} = - \frac{16}{61}$$

och

$$\frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_{(2,3,2)} = - \frac{F'_y}{F'_z} \bigg|_{(2,3,2)} = \frac{2}{61}.$$

Eftersom vektorn $\mathbf{v}$ har längd ett ger detta

$$z'_{\mathbf{v}}(2,3) = \text{grad } z(2,3) \cdot \mathbf{v} = \left(-\frac{16}{61}, \frac{2}{61} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{8 + \sqrt{3}}{61}.$$

Svar: $z'_{\mathbf{v}}(2,3) = \frac{8+\sqrt{3}}{61}$.