Namn: .... Personnummer: ....

Övningslappskrivning 1: Lösningsförslag

Onsdag 7 feb 2018 13:15-14:45
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 12 poäng

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} (1+\sin x)^{\frac{y^2}{x}}.$$

Lösning: Taylorutveckling (eller L'Hôpital's regel) ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = 1.$$

Alltså gäller

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} (1+\sin x)^{\frac{y^2}{x}} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} e^{\frac{y^2}{x}\ln(1+\sin x)} = e^{3^2\cdot 1} = e^9.$$

2. (4 poäng) Låt $\mathcal{P}$ vara planet definierat av ekvationen $2x+7y+2z=0$. Hitta alla punkter på ytan

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = xy^3 + \frac{8}{y}\right\}$$

i vilka tangentplanet är parallellt med $\mathcal{P}$.

Lösning: Planet $\mathcal{P}$ har normalvektorn $\mathbf{n} = (2,7,2)$. Ytan $z = xy^3 + \frac{8}{y}$ är nivåkurvan $F=0$ där

$$F(x,y,z) = xy^3 + \frac{8}{y} - z.$$

Gradienten

$$\nabla F = \left(y^3, 3xy^2 - \frac{8}{y^2}, -1\right)$$

är vinkelrät mot tangentplanet i varje punkt på ytan $F=0$. Alltså består problemet i att hitta alla punkter $P=(x,y,z)$ på ytan där ∇F och $\mathbf{n}$ är parallella. Nu är $\nabla F = \lambda\mathbf{n}$ med $\lambda\in\mathbb{R}$ om och endast om

$$\begin{cases} y^3 = 2\lambda, \\ 3xy^2 - \frac{8}{y^2} = 7\lambda, \\ -1 = 2\lambda, \end{cases} \qquad \text{dvs} \qquad \begin{cases} y^3 = -1, \\ 3xy^2 - \frac{8}{y^2} = -\frac{7}{2}, \\ \lambda = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

Alltså måste vi ha $y=-1$ och $x=\frac{3}{2}$. För dessa x och y värden får vi $z = xy^3 + \frac{8}{y} = -\frac{19}{2}$. Det följer att tangentplanet är parallellt med $\mathcal{P}$ endast i punkten

$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, -1, -\frac{19}{2}\right).$$

3. (4 poäng) Låt $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Hitta en lösning $f(x,y)$ på formen $f(x,y) = h(r)$ till den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

som uppfyller villkoret $f(x,y) = \frac{1}{2}$ för alla (x,y) på cirkeln $x^2+y^2 = 9$.

Lösning: Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = h'(r)\frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(r)\frac{\partial r}{\partial y} = h'(r)\frac{y}{r},$$

kan vi skriva differentialekvationen som

$$h'(r)\frac{x^2}{r} + h'(r)\frac{y^2}{r} = \frac{1}{r}.$$

Förenkling ger

$$h'(r) = \frac{1}{r^2} \quad \text{dvs} \quad h(r) = -\frac{1}{r} + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant. Villkoret $h(3) = \frac{1}{2}$ ger $-\frac{1}{3} + C = \frac{1}{2}$, dvs $C = \frac{5}{6}$. Alltså är den sökta lösningen

$$f(x,y) = \frac{5}{6} - \frac{1}{r} = \frac{5}{6} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$