Föreläsning 31 i ADK20

Mer approximationsalgoritmer

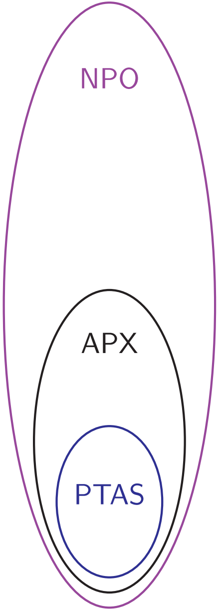
Viggo Kann

KTH

Problemklasser för approximation

- **NPO** $= \{$Optimeringsproblem i $\mathcal{NP}\}$
  Exempel:
  - TSP
  - Max klick
  - Min mängdtäckning
- **APX** $= \{$Problem som kan approximeras inom någon konstant$\}$
  Exempel:
  - Min hörntäckning
  - TSP med triangelolikhet
  - MAX 3CNFSAT
- **PTAS** $= \{$Problem som kan approximeras inom varje konstant $1+\varepsilon\}$
  Exempel:
  - Max delmängdsumma
  - TSP i planet

PTAS=Polynomal Time Approximation Scheme



Christofides algoritm

För approximation av TSP med triangelolikhet inom $\frac{3}{2}$

Indata: Komplett graf $G = \langle V, E \rangle$ med kantvikter som uppfyller triangelolikheten

Algoritm:

- $E_T \leftarrow$ Minimalt spännande träd för G
- $V' \leftarrow \{$Hörn i V med udda gradtal i trädet $E_T\}$
- $E_M \leftarrow$ Minimal matchning i $G|_{V'}$, d.v.s. grafen inducerad av V'
- Konstruera eulercykel i $E_T \cup E_M$ (går bra eftersom varje hörn har jämt gradtal)
- Gör om eulerska turen till en TSP-tur genom att snedda förbi hörn som redan besökts tidigare i turen

Christofides algoritm

Tidskomplexitet:

- Låt $n = |V|$. Då är $|E| \in \Theta(n^2)$
- $\mathcal{O}(n^2 \log n + n + n^4 + n^2 + n^2) = \mathcal{O}(n^4)$
  - $O(n^2 \log n)$: Spännande träd (Prims algoritm)
  - $O(n)$: hörn med udda gradtal
  - $O(n^4)$: minimal matchning
  - $O(n^2)$: eulersk tur
  - $O(n^2)$: sneddning

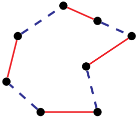
Analys av Christofides

- Vi vill visa att $||\text{producerad tur}|| < \frac{3}{2}\text{OPT}$

  $|| \bullet ||$ betyder längden av $\bullet$
- Observera att $||\text{MST}(G)|| < \text{OPT}$

  $$||\text{producerad tur}|| < ||\text{eulertur}|| = \underbrace{||\text{MST}(G)||}_{<\ \text{OPT}} + \underbrace{||E_M||}_{\substack{\text{Måste visas} \\ \text{vara} \leqslant \frac{\text{OPT}}{2}}}$$
- Betrakta grafen $G|_{V'}$, dvs grafen inducerad av V'

  $||\text{Minimal TSP}(G|_{V'})|| \leqslant \text{OPT}$ eftersom $V' \subseteq V$



Varje TSP-tur genom jämt antal hörn definierar två matchningar M_1 och M_2

$||M_1|| + ||M_2|| = ||\text{Minimal TSP}(G|_{V'})||$

- E_M är minimal matchning för $G|_{V'}$ så $||E_M|| \leqslant ||M_1||$ och $||E_M|| \leqslant ||M_2||$
- $\Rightarrow 2||E_M|| \leqslant ||M_1|| + ||M_2|| = ||\text{Minimal TSP}(G|_{V'})|| \leqslant \text{OPT}$
- $||\text{producerad tur}|| \leqslant ||\text{MST}(G)|| + ||E_M|| < \text{OPT} + \frac{\text{OPT}}{2} = \frac{3}{2}\text{OPT}$

Approximation av TSP

Visa att TSP $\notin$ APX, d.v.s. att det inte kan approximeras

- Anta motsatsen, d.v.s. att TSP kan approximeras inom f
- Reduktion från hamiltonsk cykel:

function $\textsc{HamiltonianCycle}(G = \langle V, E \rangle)$
  $n \leftarrow |V|$
  for $(v_i, v_j) \in E$ **do**
    $t(p_i, p_j) \leftarrow 1$
    $t(p_j, p_i) \leftarrow 1$
  for $(v_i, v_j) \notin E$ **do**
    $t(p_i, p_j) \leftarrow |V| \cdot f$
  if $\textsc{TSPApprox}(\{p_i\}, t) \leqslant |V| \cdot f$ **then**
    return true
  else return false

- Om $\textsc{TSPApprox}$ kan approximera TSP inom faktorn f så avgör ovanstående algoritm ifall det finns en hamiltonsk cykel i G, vilket är NP-fullständigt. Motsägelse!

Aktuell forskning i approximation

- Visa övre och undre gränser som är så nära varandra som möjligt för olika problem
- Förklara varför NP-fullständiga problem beter sig olika vid approximation – hitta problemegenskaper som förklarar approximationsegenskaperna

Lista med de bästa approximationsgränserna för optimeringsproblem:
`https://www.people.kth.se/~viggo/problemlist/`