

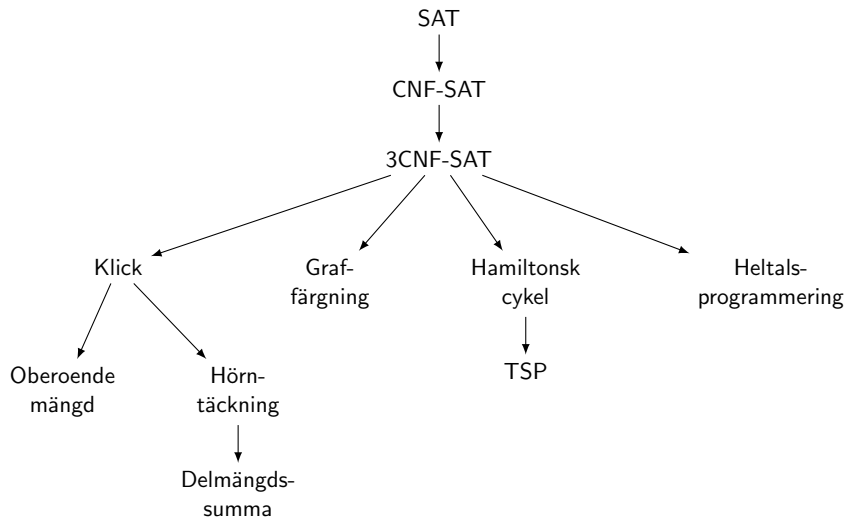
Föreläsning 25 i ADK20

NP-fullständighetsbevis

Viggo Kann

KTH

Vidare reduktioner från SAT



Satisfierbarhetsproblem

Allmänt:

- **Indata:** Boolesk formel med booleska variabler
- **Fråga:** Finns det någon variabeltilldelning som satisfierar formeln?

Olika varianter med olika krav på indataformeln:

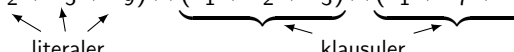
- **SAT:** Formeln får innehålla operatorerna $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \equiv$
 $((x_1 \Rightarrow x_2) \vee (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})) \wedge (x_1 \equiv (x_2 \vee x_3))$
- **CNF-SAT:** Formeln måste vara i konjunktiv normalform, dvs vara en konjunktion av disjunktioner av literaler, där en literal är en variabel eller en negerad variabel.

$$(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{18}}) \wedge x_9$$

- **k-CNF-SAT:** Formeln måste vara i CNF och varje disjunktion (klausul) ska bestå av exakt k literaler.

- **3CNF-SAT:**

$$(x_2 \vee \overline{x_5} \vee x_9) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_7 \vee x_8)$$



CNF-SAT är NP-fullständigt

- ① Visa att $\text{CNF-SAT} \in \mathcal{NP}$

Bevis:

$$\left. \begin{array}{l} \text{SAT} \in \mathcal{NP} \\ \text{CNF-SAT} \leq_p \text{SAT} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{CNF-SAT} \in \mathcal{NP}$$

- ② Visa att CNF-SAT är NP-svårt

Bevis 1: Modifiera beviset till Cooks sats (SAT är NP-svårt) och notera att den resulterande formeln kan skrivas om i CNF i polynomisk tid.

Bevis 2: Reducera SAT till CNF-SAT. Givet en SAT-formel φ , konstruera en CNF-formel ψ så att φ är satisfierbar om och endast om ψ är satisfierbar. Detta kan göras genom att man ser formeln φ som en boolesk krets och tillämpar sats 8.13 på sida 471–472 i KT.

3CNF-SAT är NP-fullständigt

- ① Visa att $3\text{CNF-SAT} \in \mathcal{NP}$

Bevis: $\left. \begin{array}{l} \text{SAT} \in \mathcal{NP} \\ 3\text{CNF-SAT} \leq_p \text{SAT} \end{array} \right\} \Rightarrow 3\text{CNF-SAT} \in \mathcal{NP}$

- ② Visa att 3CNF-SAT är NP-svårt

Bevis: Reducera CNF-SAT till 3CNF-SAT

- Givet en CNF-SAT-formel $\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$ konstruera en 3CNF-SAT-formel ψ som en konjunktion av följande klausuler, för $i \in [1..m]$:
- Anta att c_i består av j literaler.
 - $j = 3$: använd c_i direkt i ψ
 - $j = 2$: $c_i = (l_1 \vee l_2)$ använd $(l_1 \vee l_2 \vee y) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \bar{y})$
 - $j = 1$: $c_i = (l)$ använd $(l \vee y_1 \vee y_2) \wedge (l \vee y_1 \vee \bar{y}_2) \wedge (l \vee \bar{y}_1 \vee y_2) \wedge (l \vee \bar{y}_1 \vee \bar{y}_2)$
 - $j > 3$: $c_i = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_j)$ använd $(l_1 \vee l_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee l_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee l_4 \vee y_3) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{j-4} \vee l_{j-2} \vee y_{j-3}) \wedge (\bar{y}_{j-3} \vee l_{j-1} \vee l_j)$

Användbara NP-fullständiga problem 1

- **3CNF-SAT**

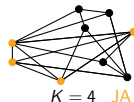
Indata: Boolesk 3CNF-formel $(x_2 \vee \overline{x_5} \vee x_9) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_7 \vee x_8)$

Fråga: Finns det någon variabeltilldelning som satisfierar formeln?

- **Clique (klick)**

Indata: Oriktad graf G , tal K

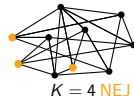
Fråga: Finns det K hörn i G som är fullständigt sammanbundna?



- **Independent set (oberoende mängd)**

Indata: Oriktad graf G , tal K

Fråga: Finns det K hörn i G som är helt oberoende?

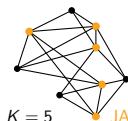


Användbara NP-fullständiga problem 2

- **Vertex Cover (hörntäckning)**

Indata: Oriktad graf G , tal K

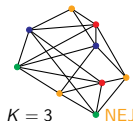
Fråga: Finns det K hörn i G som täcker samtliga kanter?



- **Graph coloring (graffärgning)**

Indata: Oriktad graf G , tal K

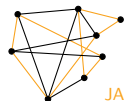
Fråga: Kan hörnen i G färgas med K färger så att inga närliggande hörn har samma färg?



- **Hamiltonsk cykel**

Indata: Oriktad graf G

Fråga: Finns det någon cykel i G som passerar varje hörn i G exakt en gång?

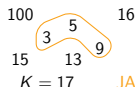


Användbara NP-fullständiga problem 3

- **Subset sum (delmängdssumma)**

Indata: En mängd ickenegativa heltal P , tal K

Fråga: Finns det någon delmängd av talen i P vars summa är K ?



- **Integer programming (heltalsprogrammering)**

Indata: $m \times n$ -matris A , m -vektor b , n -vektor c , tal K . Alla indata är heltal

Fråga: Finns det en n -vektor x med heltal så att $Ax \leq b$ och $c \circ x \geq K$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 47$$

- **Set cover (mängdtäckning)**

Indata: Uppsättning delmängder av en mängd M , tal K

Fråga: Finns det K av delmängderna som tillsammans innehåller alla element i M ?



0-1-programmering är NP-fullständigt

- ① Visa att 0-1-programmering $\in \mathcal{NP}$

Bevis:

- Givet indata A, b, c och K
- Givet lösning $x \in \{0,1\}^n$
- Verifiera att $Ax \leq b$ och att $c \circ x \geq K$

- ② Visa att 0-1-programmering är NP-svårt

Bevis: Reducera 3CNF-SAT till 0-1-programmering

- Givet en 3CNF-SAT-formel $\varphi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$
- Konstruera A, b, c, K så att φ är satisfierbar om det finns $x \in \{0,1\}^n$ så att $Ax \leq b$ och $c \circ x \geq K$
- Inför en variabel x_i för varje variabel y_i i φ
- Låt $x_i = 0$ motsvara $y_i = \text{falsk}$ och $x_i = 1$ motsvara $y_i = \text{sant}$
- Inför en olikhet för varje klausul c_i
 - $y_i \vee y_j \vee y_k \rightarrow x_i + x_j + x_k \geq 1$
 - $y_i \vee y_j \vee \overline{y_k} \rightarrow x_i + x_j - x_k \geq 0$
 - $y_i \vee \overline{y_j} \vee \overline{y_k} \rightarrow x_i - x_j - x_k \geq -1$
 - $\overline{y_i} \vee \overline{y_j} \vee \overline{y_k} \rightarrow -x_i - x_j - x_k \geq -2$
- Låt $c = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ och låt $K = 0$

Visa att följande problem är NP-fullständigt

Delgrafsisomorfi

Indata: Oriktade grafer G_1 och G_2

Fråga: Är G_1 en delgraf till G_2 ?

- Visa att delgrafsisomorfi tillhör $\mathcal{NP}$
- Visa att problemet är NP-svårt genom att reducera ??