

1. LOGIK, MÄNGDLÄRA OCH LITE OM MATEMATIKEN SOM SÅDAN

- Det är dock viktigt att svaren är *rimliga*. Om man gör ett mindre slarvfel så kan man få ett svar som är klart orimligt (som ett negativt resultat då man adderar ett antal positiva tal). Rimlighetsbedömning är oerhört viktigt i praktiskt arbete, och är något man ska göra reflexmässigt.

1.2 Logik

Logik är namnet på konsten att föra ett korrekt resonemang, och mycket relevant inom matematiken. Ämnet brukar tas upp i kurser i filosofi, men dessutom är det en *del* av matematiken, då det går att införa symboler och ställa upp regler för logik på precis samma sätt som för räkning med tal och de fyra räknesätten. Symbolisk logik brukar ingå i kurser i diskret matematik, och de flesta högskolor ger också separata kurser som bara handlar om logik. Här ska vi ta upp så pass mycket som behövs för att man ska kunna hänga med i den typ av resonemang som förekommer i grundläggande matematikkurser på högskolenivå.

1.2.1 Utsagor

En **utsaga** är något som man säger, något meningsfullt som kan vara sant eller falskt.

Exempel 1.1: Utsagor

- " $4 = 2 + 2$ " är en sann utsaga.
- "Miniräknare räknar alltid rätt" är en falsk utsaga (se avsnitt 2.2.4 på sidan 31).
- "Goddag" är inte en utsaga, för även om uttalandet är meningsfullt är det lite svårt att tilldela det en sanningshalt.
- "Det är vardag idag" är en **öppen** utsaga, vilket innebär att dess sanningshalt går inte att avgöra utan mer information, typ vad "idag" egentligen är för något.

De två första exempelutsagorna var **slutna**, eftersom de innehöll allt som behövdes för att man skulle kunna avgöra deras sanningshalt. ■

Utsagor kan vara mer eller mindre komplicerade, och är ofta ihopsatta av flera mindre utsagor.

1.2.2 Konnektiv

Logiska konnektiv modifierar utsagor eller sammanbinder dem till större enheter. Här tar vi de tre viktigaste:

Definition 1.1: Negation (inte) Negationen till en utsaga är sann om utsagan är falsk och tvärtom. Negationen till utsagan "jag kom ihåg att anmäla mig till tentan" är "jag kom *inte* ihåg att anmäla mig till tentan". ■

Exempel 1.2: Inte lika med "Två plus två blir fem", vilket skrivs " $2 + 2 = 5$ ", är en falsk utsaga. Dess negation kan skrivas " $2 + 2 \neq 5$ ", och är en sann utsaga. I många fall betecknar man negation genom att stryka över en symbol, som man här gjort med likhetstecknet. ■

Definition 1.2: Konjunktion (och) Konjunktionen av två utsagor räknas som sann om båda utsagorna är sanna. Ett exempel på en konjunktion:

Du är behörig till flervariabelkursen om *du är godkänd på envariabelkursen och på algebrakursen*.

Den kursiverade delen av meningen är en konjunktion. Den är sann om det är sant både att man är godkänd på envariabelkursen och att man är godkänd på algebrakursen.

"Och" i logisk mening betecknas med symbolen $\wedge$. ■

Exempel 1.3: Flerstegsberäkning En flerstegsberäkning, som $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$, är en konjunktion av flera utsagor. Den här beräkningen är konjunktionen av de två (sanna) utsagorna,

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 \quad \text{och} \quad 2 + 12 = 14$$

Exempel 1.4: Ett intervall En vanlig konstruktion är *intervall* (se avsnitt 2.1.7). Att talet x ligger i intervallet mellan fem och tio kan skrivas $5 < x < 10$ (vilket uttalas "fem är mindre än x som är mindre än tio"). Detta är en konjunktion av två utsagor, och kan alternativt skrivas $(5 < x) \wedge (x < 10)$. Båda utsagorna måste vara sanna för att det ska vara sant att x ligger i intervallet. Så

- π tillhör inte intervallet, eftersom $5 < \pi$ är en falsk utsaga.
- 1 000 000 tillhör inte intervallet, eftersom $1\,000\,000 < 10$ är en falsk utsaga,
- 6,789 tillhör intervallet, eftersom $5 < 6,789$ och $6,789 < 10$ båda är sanna utsagor. ■

Definition 1.3: Disjunktion (eller) Disjunktionen av två utsagor räknas som sann om minst en av utsagorna är sann. Ett exempel på en disjunktion:

Du är behörig till algebrakursen om *du har läst matematik D i gamla gymnasiet eller matematik 4 i nya gymnasiet*.

1. LOGIK, MÄNGDLÄRA OCH LITE OM MATEMATIKEN SOM SÅDAN

Den kursiverade delen är en disjunktion. Den är sann om man läst matematik D, men inte matematik 4; den är sann om man har läst matematik 4, men inte matematik D, och den är sann om man av någon anledning har läst båda kurserna. Det är bara om man inte läst någon av dem som den är falsk.

I talat språk finns det flera varianter av eller: och/eller och antingen/eller. Antingen/eller betyder "den ena eller den andra, men inte båda". I logiska och matematiska sammanhang är det alltid och/eller som menas, om man inte uttryckligen lägger till "men inte båda".

"Eller" i logisk mening betecknas med symbolen $\vee$. ■

Exempel 1.5: Plusminus Skriver man $x = \pm 2$ så menar man disjunktionen $x = 2$ eller $x = -2$. ■

Exempel 1.6: Ostrikt olikhet En viktig matematisk relation är $\leq$, mindre än eller lika med. Om man skriver " $a \leq b$ " så menar man " $(a < b) \vee (a = b)$ ". Detta innebär bland annat att

- $10 \leq 10$ är en sann utsaga, eftersom $10 = 10$ är sant.
- $10 \leq 10,1$ är en sann utsaga, eftersom $10 < 10,1$ är sant.
- $10 \leq 9,9$ är en falsk utsaga, eftersom $10 < 9,9$ och $10 = 9,9$ båda är falska utsagor. ■

Om du inte kommer ihåg vilken av symbolerna $\wedge$ och $\vee$ som betyder vad: Skriv orden med bokstäver i stället!

1.2.3 Ekvivalens och implikation

Med konnektiv bygger man ihop utsagor till mer komplicerade utsagor. Men man kan också vilja titta på förhållandet mellan två utsagor, och då är det två typer av förhållanden som är speciellt viktiga.

Definition 1.4: Ekvivalens (om och endast om) Två utsagor är **ekvivalenta** om de *alltid* har samma sanningsvärde. (*Ekvivalens* betyder "samma värde", och här är det sanningsvärdet det handlar om.)

Ekvivalens betecknas med symbolen $\Leftrightarrow$. ■

Exempel 1.7: Några sanna ekvivalenser

- Att ett tal är jämnt är ekvivalent med att talet kan skrivas som två gånger ett heltal.
- Du har rätt till slutbetyg på kursen om och endast om du är godkänd på samtliga delmoment i kursen.
- Att det är helgdag är samma sak som att det inte är vardag.

$$\bullet \quad 2 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Observera att samtliga här ingående delutsagor (som "det är helgdag") är öppna. De kan vara sanna eller falska, beroende på omständigheterna. Men om utsagan till vänster är sann så är den till höger det också och tvärtom.

Ekvivalens formuleras ofta som **om och endast om** eller vardagligare **är samma sak som**. ■

Notera att ekvivalens mellan två utsagor är en utsaga, som kan vara sann eller falsk.

En och samma utsaga kan i allmänhet formuleras på ett antal ekvivalenta sätt. Olika formuleringar är praktiska i olika situationer, så en stor del av matematiskt resonemangsförande handlar mest om att omformulera sig på ett konstruktivt sätt.

Om man inte är medveten om detta kan många resonemang vara mycket svåra att följa, eftersom omformuleringarna ofta görs utan några som helst kommentarer. Erfarna läsare vet om det här, men det kan ställa till problem för den som är ovan.

Definition 1.5: Implikation (om ... så ...) En utsaga **implicerar** en annan om den andra garanterat är sann om den första är det. (Det spelar ingen roll vad som händer om den första utsagan är falsk.) Implikation betecknas med symbolen $\Rightarrow$. ■

Exempel 1.8: Några implikationer

- Att ett tal är större än 10 implicerar att det är positivt.
- Om du lämnar in uppgifterna i tid så kommer de att bli rättade innan sommaren.
- Att du inte anmälde dig till tentan medför att du inte får skriva den.
- Banken är öppen endast om det är vardag.
- $x = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$

Också här var samtliga utsagor öppna.

Implikation formuleras ofta som **om ... så ...**, **endast om** eller som **medför**. ■

Implikation är en ytterst vanlig konstruktion.

Exempel 1.9: Flerstegsberäkning En flerstegsberäkning, som $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$ i exempel 1.3 på sidan 7, är förutom en konjunktion också en implikation: ur de två utsagorna $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12$ och $2 + 12 = 14$ kan man dra slutsatsen att $2 + 3 \cdot 4 = 14$. ■

1. LOGIK, MÄNGDLÄRA OCH LITE OM MATEMATIKEN SOM SÅDAN

Exempel 1.10: Behörighetskrav Utsagorna som användes för att exemplifiera begreppen konjunktion och disjunktion var implikationer, vilket syns bättre om man omformulerar dem lite grand:

- Om du är godkänd på envariabelkursen och på algebrakursen så är du behörig till flervariabelkursen.
- Om du har läst matematik D i gamla gymnasiet eller matematik 4 i nya gymnasiet så är du behörig till algebrakursen. ■

En implikation "pekar" åt ett håll. Vänder man på pilen så får man en implikation åt andra hållet, **omvändningen** till den första implikationen. Detta är en annan utsaga.

Exempel 1.11: Omvändning av implikation Omvändningen till den sanna implikationen "att ett tal är större än 10 implicerar att det är positivt" är den *falska* utsagan "att ett tal är positivt implicerar att det är större än 10".

Utsagan är falsk eftersom det finns tal där det är sant att de är positiva, men inte sant att de är större än 10. (Att det finns oändligt många tal där det är sant både att de är positiva och att de är större än 10 hjälper inte – går det att göra första delen sann samtidigt som andra delen är falsk så gäller inte implikationen.) ■

Ö1.8

Däremot går det att vända på alltihop, pilen inberäknad. Man kan skriva

$$x^2 = 4 \iff x = -2$$

om man vill. Detta kan utläsas "x-kvadrat är lika med fyra om x är lika med två", och betyder exakt samma sak som den sista utsagan i exempel 1.8.

Ekvivalenser är dubbelriktade implikationer; den vänstra utsagan implicerar den högra, och den högra implicerar den vänstra.

Då man arbetar med ett problem är man ofta bara intresserad av att resonera åt ett håll, från frågan till svaret. Då kan man skriva implikationspilar även om ekvivalenspilar hade gått att använda, eftersom det går snabbare än att fundera på vilken sorts samband det egentligen handlar om. Därför brukar ekvationslösning ofta skrivas som

$$2x + 3 = 4 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

fastän det här skulle vara fullt korrekt att använda $\Leftrightarrow$ i stället.

Om man ger information som implicerar annan information så kan man säga att den andra informationen framgår **implicit**. Om man säger "vi har ett tal som är större än 10" så har man implicit sagt "vi har ett positivt tal". Om man säger "vi har en lätt plasthink med fem liter vatten" så har man implicit sagt "vi har en sak som väger cirka fem kilo". Att titta efter implicit given

information är viktigt i alla ämnen, och också att inte ta något för givet som *inte* är implicerat. Information som är given i klartext sägs vara **explicit** given.

Vanliga misstag

- Att förväxla en implikation med dess omvändning.
- Att resonera som om en implikation vore en ekvivalens.
- Att blanda ihop de logiska symbolerna $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$ med den matematiska symbolen $=$, som används i helt andra sammanhang.
- Att missa implicit given information.

1.3 Mängdlära

Det här avsnittet fordrar att man behärskar den grundläggande logiska terminologin.

I många sammanhang, både matematiska och icke-matematiska, diskuterar man grupper av objekt med någon gemensam egenskap: alla trianglar, alla lösningar till en viss ekvation, alla sätt att stava sj-ljudet, och så vidare.

Diskussionen underlättas om man inför begreppet **mängd**, med vilket menas en väldefinierad samling objekt. De objekt som ingår i mängden kallas dess **element**. Om man vill säga att elementet x tillhör mängden M skriver man $x \in M$. (Symbolen $\in$ är en variant av e som i *element*.)

En mängd kan beskrivas på olika sätt:

- Man kan *räkna upp* elementen. Mängden "förväntade deltagare på den här kursen" brukar beskrivas med en deltagarlista. Mängden hårda vokaler i svenska språket är $\{a, o, u, å\}$. Man brukar, som här, inleda en mängdbeskrivning med en **klammerparentes**, $\{$, och avsluta med $\}$.

Den här metoden fungerar bra på små mängder, dåligt på stora och inte alls på oändliga mängder.

- Man kan *beskriva* elementen. Mängden som består av talen från och med noll kan skrivas

$$\{x \mid x \geq 0\}$$

Uttrycket utläses som "mängden av alla x sådana att x är större än eller lika med noll". Mängden av lösningar till ekvationen $x^2 = x$ kan skrivas

$$\{x \mid x^2 = x\}$$

Grundlig matematik

Inledande matematik för ingenjörer,
naturvetare och andra problemlösare

HILLEVI GAVEL

 Studentlitteratur