

Kort om exponentialfunktioner, logaritmer och potensfunktioner

1. EXPONENTIALFUNKTIONER OCH LOGARITMER

I ett uttryck av formen a^b kallas a för *bas* och b för *exponent*.

Om vi låter exponenten vara en variabel och $a > 0$ fås *exponentialfunktioner* $f(x) = a^x$. (Vanligen kräver man också att $a \neq 1$). Sådana studerar man till exempel i gymnasiekurserna, och begreppet ”exponentiell tillväxt” är vanligt förekommande i olika tillämpningar, så exponentialfunktioner är i den mening ett välkänt begrepp som vi kanske tar för självklart. Men vad menar vi egentligen med uttrycket a^x ?

Om x är ett positivt heltal ger själva definitionen av potenser att $a^x = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (x stycken faktorer). Som vi diskuterat tidigare i kursen kan man ur denna definition lätt visa de tre potenslagarna

$$\text{P1: } r^x r^y = r^{x+y}, \quad \text{P2: } (r^x)^y = r^{xy}, \quad \text{P3: } \frac{r^x}{r^y} = r^{x-y},$$

för positiva heltalsexponenter. De mönster som potenslagarna bildar leder sedan fram till lämpliga definitioner av uttrycket a^x för positiva baser och rationella exponenter - definitioner sådana att P1 – P3 fortsätter att gälla.

Men när vi vill utvidga potensbegreppet till att omfatta även irrationella exponenter blir det knepigare. Hur ska vi exempelvis definiera $3^{\sqrt{2}}$ eller $2^{-\pi}$? Det finns minst tre olika sätt att tänka på detta.

I. Från potenser till exponentialfunktioner till logaritmer. Det intuitivt kanske enklaste är att tänka sig a^x för irrationella värden på x definieras genom att approximera den irrationella exponenten x med rationella tal, och tänka på a^x som definierat av ett gränsvärde av sådana approximationer. Kom ihåg att ett irrationellt tal kan approximeras med godtycklig noggrannhet av rationella tal genom att ta med fler och fler decimaler i decimalbråksutvecklingen. Så approximeras till exempel $\sqrt{2}$ med stigande precision av de rationella talen 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, Vi kan därför tänka på $3^{\sqrt{2}}$ som det tal som är gränsvärdet av följden

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, 3^{1.414213}, \dots$$

Poängen här är att eftersom exponenterna är rationella tal så har dessa uttryck alla ett väldefinierat värde.

Man kan visa att den funktionen a^x , $0 < a \neq 1$, man får på detta sätt är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Om $0 < a < 1$ är a^x strikt avtagande, och om $a > 1$ är a^x strikt växande. Man kan också bevisa att potenslagarna nu gäller för godtyckliga reella exponenter, det vill säga även för irrationella exponenter. Eftersom funktionen a^x är strikt växande, eller

avtagande, är den också inverterbar på sin värdemängd. Inversfunktionen kallar vi $\log_a x$. Inversen till e^x är den naturliga logaritmen $\ln x$. Logaritmlagarna för logartimfunktionerna blir en direkt konsekvens av potenslagarna för exponentialfunktionerna.

Att göra ovanstående resonemang logiskt precist kräver dock mycket arbete, och kommer att beröra grundläggande egenskaper hos de rationella och reella talen. Hur kan vi till exempel vara säkra på att talföljden med approximtioner till $3^{\sqrt{2}}$ överhuvudtaget närmar sig något gränsvärde?

Uppgift 1. Utgå ifrån de tre potenslagarna P1 – P3 och bevisa att de tre logartimlagarna

$$L1: \quad \ln uv = \ln u + \ln v, \quad L2: \quad \ln u^t = t \ln u, \quad L3: \quad \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v,$$

gäller för alla positiva reella tal u och v och alla reella tal t .

II. Från logartimer till exponetialfunktioner och potenser. Det finns en alternativ väg att definiera logaritmer och exponentialfunktioner, en väg som är lättare att göra logiskt vattentät och som också bättre återspeglar den historiska utvecklingen av begreppen, men som kanske känns mindre intuitiv.

Man *definierar* då först $\ln x$ som

$$\ln x = \left\{ \text{arean under kurvan } y = 1/t \text{ mellan } 1 \text{ och } x \right\} = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

varpå man visar, med hjälp av integralens egenskaper, att denna funktion $\ln x$ har precis de egenskaper som logaritmer ”ska ha”, speciellt visar man utifrån denna integraldefinition att L1 – L3 gäller, och att denna funktion $\ln x$ är strikt växande och därmed inverterbar. Talet e definieras som det tal som är sådant att $\ln e = 1$, och man visar sedan att inversfunktionen till $\ln$ -funktionen får formen e^x och uppfyller potenslagarna P1 – P3. Man kan sedan gå vidare att definiera exponetialfunktioner och logaritmer med andra baser.

I detta scenario fås alltså logaritmlagarna som en konsekvens av definitionen $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt$, och potenslagarna i sin tur fås som en konsekvens av logaritmlagarna.

Uppgift 2. Utgå ifrån logaritmlagarna L1 – L3 och bevisa potenslagarna P1 – P3.

III. Vi börjar med exponentialfunktionen ...

Ett tredje sätt, som också omnämns i läroboken, är att börja med att definiera funktionen $\exp(x)$ genom

$$\exp(x) \stackrel{\text{Definition}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Talet e definieras som

$$e \stackrel{\text{Definition}}{=} \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

och man kan sedan visa att $\exp(x)$ uppfyller potenslagarna, och att

$$\exp(x) = e^x.$$

Man visar också att $\exp(x)$ är en inverterbar funktion på $\mathbb{R}$, med de positiva reella talen som värdemängd. Följaktligen har funktionen en invers; vi betecknar denna invers som $\ln(x)$. Logaritmlagarna för $\ln$ kan härledas, och sedan går man vidare och definierar exponentialfunktioner och logaritmer med andra baser.

2. NÅGRA ÖVNINGSUPPGIFTER PÅ EXPONENTIALFUNKTIONER OCH LOGARITMER

Uppgift 3. Skissera för hand i samma koordinatsystem funktionsgraferna $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^x$ och $y = 4^x$.

- Hur förhåller sig de tre kurvorna till varandra? Var skär de varandra? Vilka kurvor "ligger överst", "i mitten" och "underst" på olika intervall?
- Förklara varför $y = (\frac{1}{2})^x$ och $y = 2^x$ är varandras spegelbilder i y -axeln.
- Hur måste värdet på x ändras för att värdet på 2^x ska fördubblas respektive halveras?
- Hur måste värdet på x ändras för att värdet på 4^x ska fördubblas respektive halveras?

Uppgift 4. a) Skissera graferna $y = e^x$ och $y = \ln x$ i samma koordinatsystem, och markera speciellt punkterna $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, e)$, $(e, 1)$, $(1/e, -1)$ och $(-1, e)$.

b) Bevisa att följande påstående: *Punkten (a, b) ligger på grafen $y = e^x$ om och endast om punkten (b, a) ligger på grafen $y = \ln x$.*

Uppgift 5. Lös ekvationerna

a) $e^{2x} = 8e^{-x}$ b) $2^x = 3^x/4$ c) $4 + \log_2 x = \log_2 x^2$ d) $\ln x + \ln(x+1) = a, a \in \mathbb{R}$

Uppgift 6. a) Visa att $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$ för positiva tal $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Använd resultatet i a) för att visa att $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ för alla positiva reella tal a och x .

3. POTENSFUNKTIONER

Om vi istället väljer basen i ett potensuttryck a^b som variabel får vi de så kallade *potensfunktionerna* $f(x) = x^b$. Dessa är i allmänhet definierade endast för $x > 0$, men för vissa värden på b kan de definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ eller för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observera också att för vissa värden på b så är potensfunktionen x^b ett polynom ($b \in \mathbb{N}$), en rationell funktion ($b \in \mathbb{Z}$) eller en rotfunktion ($b = 1/n, n \in \mathbb{Z}_+$).

Uppgift 7. Ange största möjliga definitionsmängd till var och en av följande potensfunktioner. Skissera också funktionernas grafer i ett gemensamt koordinatsystem så att man ser hur de förhåller sig till varandra.

$$\text{a) } y = x^2 \quad \text{b) } y = x^{1/2} \quad \text{c) } y = x^{1/3} \quad \text{d) } y = x^3 \quad \text{e) } y = x^{3/2}$$

Vilka av funktionerna är inverterbara, och i vilka är i sådana fall deras inverser?

Uppgift 8. Ange största möjliga definitionsmängd till var och en av följande potensfunktioner. Skissera också funktionernas grafer i ett gemensamt koordinatsystem så att man ser hur de förhåller sig till varandra.

$$\text{a) } y = x^{-1} \quad \text{b) } y = x^{-2} \quad \text{c) } y = x^{-1/2}$$

Uppgift 9. Skissera följande funktionsgrafer

$$\text{a) } y = (x - 2)^{-1} \quad \text{b) } y = (x + 3)^{-2} - 1 \quad \text{c) } y = (x + 1)^{-1/2} + 2$$