DD1362 Programmeringsparadigm: Artificiella språk och syntaxanalys, föreläsning 2

Karl Palmskog

KTH

11 April, 2022

Förra föreläsningen

- Artificiella språk
  - alfabet Σ
  - språk är dälmängder av Σ^*
- Reguljära uttryck
  - exempel: `letter (letter | digit)*`
  - språktillhörighet genom matchning
- Ändliga automater
  - grafer med kanter som är märkta med tecken
  - språktillhörighet genom "exekvering"

Dagens föreläsning

1. Mer formellt om automater
2. Reguljära språk
3. Grammatiker

1 Mer formellt om automater

2 Reguljära språk

3 Grammatiker

Mer formellt om automater

- Σ: alfabet
- Q: mängd av tillstånd (hörn i grafen)
- $q_0 \in Q$: initialt tillstånd
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$: transitioner (märkta kanter i grafen)
- F: mängd av slutliga tillstånd (dubbla cirklar)

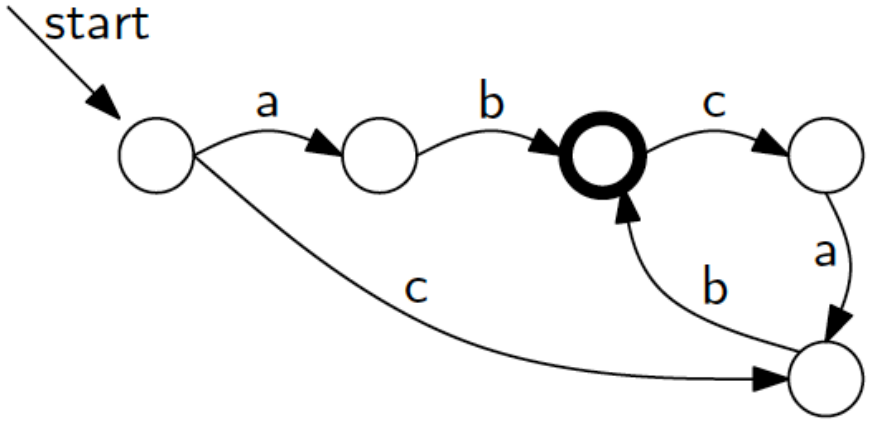
Typer av ändliga automater

- Deterministisk ändlig automat (DFA)
  - δ är en funktion
  - om $(q, a, q_1) \in \delta$ och $(q, a, q_2) \in \delta$ så $q_1 = q_2$
  - fokus i den här kursdelen
- Icke-deterministisk ändlig automat (NFA)
  - δ är en icke-funktionsrelation
  - behandlas inte i den här kursen

Reguljära uttryck och ändliga automater

Om L är ett språk, så finns ett reguljärt uttryck som precis beskriver L **om och endast om** det finns en (deterministisk) ändlig automat som accepterar precis alla ord in L.

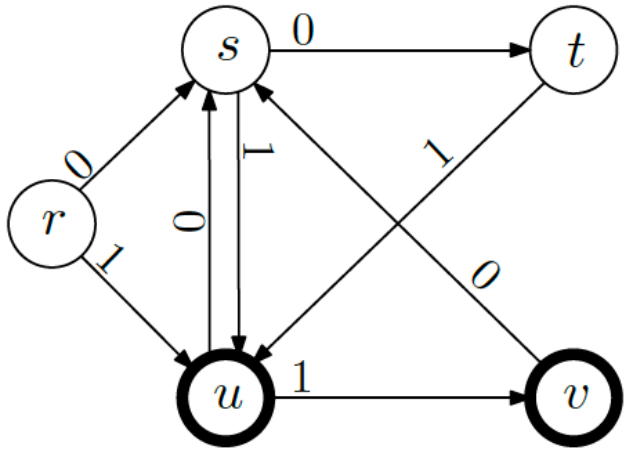
Exempel på automat och reguljärt uttryck



Strängar vi ska fånga med ett reguljärt uttryck:

- börjar med `ab` eller `cb` (accepterande tillstånd) ...
- ... sedan valfritt antal `cab` (loop)
- översättning: `(ab|cb)(cab)*`
- mer kompakt: `[ac]b(cab)*`

Exempel på automat och reguljärt uttryck



Strängar vi ska fånga med reguljärt uttryck:

- mer än två nollor/ettor i rad ..
- .. och slutar i en etta
- första översättningsförsök: `0?(10)*1`
- fullständig översättning: `0?0?(1?10?0)*1?1`

1 Mer formellt om automater

2 Reguljära språk

3 Grammatiker

Reguljära språk

- Reguljära uttryck och ändliga automater har samma uttrycksfullhet (beskriver samma klass av språk)
- Språk som kan beskrivas av ett reguljärt uttryck eller en ändlig automat kallas för **reguljära språk**
- Exempel på reguljära språk:
  - namn på labbar i DD1362
  - alla binära strängar
  - giltiga identifierare i de flesta programspråk

Reguljära språks egenskaper

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

- $\bar{A} = \Sigma^* - A$ är ett reguljärt språk
  - bevisidé: byt accepterande och icke-accepterande tillstånd i DFA
- $A \cup B$ är ett reguljärt språk
  - bevisidé: beskriv med reguljära uttrycket $R_A|R_B$
- $A \cap B$ är ett reguljärt språk
  - bevisidé: använd att $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$
- $A - B$ är ett reguljärt språk
  - bevisidé: använd att $A - B = \overline{\bar{A} \cap B}$

Reguljära uttrycks begränsningar

- Finns det språk som inte kan beskrivas av reguljära uttryck (eller ändlig automat)?
- Om sådana språk finns, hur kan vi bevisa att vi **inte kan** konstruera ett reguljärt uttryck för språket?
- Exempelspråk: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Intuition för att en finit automat inte existerar (ej bevis):
  - efter att ha läst k stycken a och sedan endast b, måste automaten komma ihåg att bara k stycken b får läsas
  - men automaten kan bara komma ihåg ett fixt antal tillstånd, medan n kan vara godtyckligt stort

Automat som påstås känna igen $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

- Antag att det finns en automat som känner igen L
- Låt automaten ha k tillstånd, $|Q| = k$
- Ge automaten a, aa, aaa, ..., och låt q_i vara tillståndet efter läsning av a^i
- Betrakta följande sekvens av tillstånd: $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k$
- Sekvensen är $k+1$ tillstånd lång, så det måste finnas ett repeterat tillstånd, dvs i så att $q_i = q_{i+p}$ för ett $p > 0$
- Så automaten borde acceptera $a^{i+p}b^{i+p}$
- Men då måste den också acceptera $a^i b^{i+p}$, eftersom den är i samma tillstånd efter att ha läst a^i som efter a^{i+p}
- Således accepterar den inte precis det givna språket, motsägelse
- En sådan automat kan därför inte existera

Begränsningar för reguljära språk

- Automaten har begränsat minne, kan inte "räkna"
- Automat i givet tillstånd beter sig alltid likadant

Exempel på "enkla" språk som ej är reguljära:

- Balanserade parentesuttryck (t.ex. `()(())`)
- Palindrom (t.ex. "abba", "nitalarbralatin")
- Strängar av formen xx för någon sträng x (t.ex. "aa", "hejhej", "01110010111001")

1 Mer formellt om automater

2 Reguljära språk

3 Grammatiker

Grammatiker

- För att beskriva språk som inte kan beskrivas med reguljära uttryck krävs mer uttrycksfulla formalismer
- Grammatiker är en sådan formalism
- Betrakta återigen språket $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ som inte kan beskrivas av ett reguljärt uttryck
- Hur kan vi beskriva L matematiskt?

Språkdefinition med induktion

- Definiera $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ induktivt:
  - basfall, $i = 0$: det tomma ordet, $a^0 b^0 = \epsilon$ är ett ord i L
  - induktivt fall: om $a^i b^i$ är ett ord i L, så är $a^i abb^i = aa^i bb^i = a^{i+1} b^{i+1}$ ett ord i L

- Definiera språket av balanserade parentesutryck induktivt:
  - basfall: tomma strängen ϵ är ett balanserat parentesuttryck
  - induktivt fall: om x och y är balanserade parentesuttryck så är $(x)y$ ett balanserat parentesuttryck

Grammatik för språket L

- Grammatiker låter oss beskriva språk med **rekursion**
- Grammatik för L: $W \rightarrow \epsilon \,|\, aWb$
- Grammatiken kan förstås på följande sätt:

  Ett giltigt ord W är antingen det tomma ordet ϵ eller ett a följt av ett giltigt ord följt av ett b.

Beståndsdelarna för en grammatik

Grammatik G för språket L:

- **Slutsymbolerna** är element i det underliggande alfabetet
- **Ickeslutsymbolerna** representerar delar av ord
- **Produktionsregler** beskriver hur ord byggs upp:
  - Första regeln för L: $W \rightarrow \epsilon$
  - Andra regeln för L: $W \rightarrow aWb$

Härledningar (derivations)

$$S \to B \,|\, AA$$
$$A \to cA \,|\, dB$$
$$B \to aSa \,|\, \epsilon$$

- hur hittar man strängar som är i språket som har S som startsymbol?
- utgå från S och använd reglerna för att få giltiga strängar
  - $S \to B \to aSa \to aBa \to aa$
  - $S \to B \to aSa \to aAAa \to acAAa \to acdBAa \to acdAa \to acddBa \to acdda$
  - i varje steg ersätter vi precis en ickeslutsymbol
- Vi är vanligtvis intresserade av omvända fallet: givet strängen för ett program, följer strängen grammatiken för ett programspråk som Java, Scala eller Go?

Notation för grammatiker

- Matematisk notation:

$$S \to B \mid AA$$
$$A \to cA \mid dB$$
$$B \to aSa \mid \epsilon$$

- Backus-Naur-form (distinkt syntax för slutsymboler):

```
<S> ::= <B> | <A><A>
<A> ::= "c" <A> | "d" <B>
<B> ::= "a" <S> "a" | ""
```

Grammatiker för programspråk

- Grammatiker är tillräckligt uttrycksfulla för att beskriva syntaxen i populära programspråk (Java, C#, Scala, ...)
- Specifikationer av programspråksyntax använder ofta grammatiker (ofta används domänspecifik notation)
- Sådana grammatiker används sedan grund för implementation av **parsers** för språken
- Dock har vissa programspråk ingen överenskommen grammatik (parserdefinierad syntax)

Exempel: uttryck i Scala

```
Expr        ::=  (Bindings | [‘implicit’] id | ‘_’) ‘=>’ Expr
              |  Expr1
Expr1       ::=  ‘if’ ‘(’ Expr ‘)’ {nl} Expr [[semi] ‘else’ Expr]
              |  ‘while’ ‘(’ Expr ‘)’ {nl} Expr
              |  ‘try’ Expr [‘catch’ Expr] [‘finally’ Expr]
              |  ‘do’ Expr [semi] ‘while’ ‘(’ Expr ‘)’
              |  ‘for’ (‘(’ Enumers ‘)’ | ‘{’ Enumers ‘}’)
                 {nl} [‘yield’] Expr
              |  ‘throw’ Expr
              |  ‘return’ [Expr]
              |  [SimpleExpr ‘.’] id ‘=’ Expr
              |  SimpleExpr1 ArgumentExprs ‘=’ Expr
              |  PostfixExpr
              |  PostfixExpr Ascription
              |  PostfixExpr ‘match’ ‘{’ CaseClauses ‘}’
PostfixExpr ::=  InfixExpr [id [nl]]
InfixExpr   ::=  PrefixExpr
              |  InfixExpr id [nl] InfixExpr
PrefixExpr  ::=  [‘-’ | ‘+’ | ‘~’ | ‘!’] SimpleExpr
```

Exempel: grammatik för listor i Haskell

`[1, 2, 3]` `1:[2,3]` `[]` `1:2:3:[]`

Induktiv definition:

- Första basfallet: den tomma listan `[]` är en Haskell-lista
- Andra basfallet: om `L` är en kommaseparerad sekvens av element, så är `[L]` en Haskell-lista
- Induktivt fall: om `H` är ett listelement och `T` är en Haskell-lista, så är `H:T` en Haskell-lista

BNF:

```
<List> ::=
 "[]" | "[" <ListElems> "]" | <ListElem> ":" <List>
```

Haskell-listor, fortsättning

```
<List> ::=
 "[]" | "[" <ListElems> "]" | <ListElem> ":" <List>
<ListElems> ::= <ListElem> | <ListElem> "," <ListElems>
```

Hur ska `<ListElem>` definieras?

- i riktiga Haskell kan element i listor vara godtyckliga Haskelluttryck
- för att göra exemplet enklare: begränsa element till 0 och 1

```
<ListElem> ::= "0" | "1"
```