September 2022 – Förslag till lösningar

1. Logik. Betrakta nedanstående icke-standardmässiga slutledningsregler:

Utvidgad Disjunktiv Syllogism:

1. $p \vee q \vee r$
2. $\neg q$
3. $\neg r$

$\therefore \quad p$

Utvidgat Dilemma:

1. $p \to r$
2. $q \to w$
3. $p \vee q$

$\therefore \quad r \vee w$

Bevisa att de är giltiga genom att använda sanningstabeller.
OBS: Var *mycket* noggrann med att motivera hur du använder sanningstabellerna, endast sanningstabeller utan någon text eller bara med bristfälliga markeringar är underkänt.

Ledning: Den första sanningstabellen kommer att ha tre rader och den andra kommer att ha fyra.

Lösning: Sanningstabellen för *Utvidgad Disjunktiv Syllogism* har följande utseende:

p	q	r	$p \vee q \vee r$	$\neg q$	$\neg r$	*Alla uppfyllda*
s	s	s	s	f	f	*Nej*
s	s	f	s	f	s	*Nej*
s	f	s	s	s	f	*Nej*
$\boldsymbol{s}$	f	f	s	s	s	*Ja*
f	s	s	s	f	f	*Nej*
f	s	f	s	f	s	*Nej*
f	f	s	s	s	f	*Nej*
f	f	f	f	s	s	*Nej*

Resonemang: Det finns tre premisser numrerade från 1-3. I kolumnen "*Alla Uppfyllda*" anger vi om alla premisser är uppfyllda eller ej. Som synes är det bara så på en enda rad. Slutledningsregeln kräver att vi kan dra slutsatsen att p har sanningsvärdet *Sann* och som vi ser är detta fallet på denna rad. Det aktuella sanningsvärdet är markerat i fet stil ($\boldsymbol{s}$).

Sanningstabellen för *Utvidgat Dilemma* har följande utseende:

p	q	r	w	$p \to r$	$q \to w$	$p \vee q$	$r \vee w$	*Alla uppfyllda*
s	s	s	s	s	s	s	$\boldsymbol{s}$	*Ja*
s	s	s	f	s	f	s	s	*Nej*
s	s	f	s	f	s	s	s	*Nej*
s	s	f	f	f	f	s	f	*Nej*
s	f	s	s	s	s	s	$\boldsymbol{s}$	*Ja*
s	f	s	f	s	s	s	$\boldsymbol{s}$	*Ja*
s	f	f	s	f	s	s	s	*Nej*
s	f	f	f	f	s	s	f	*Nej*
f	s	s	s	s	s	s	$\boldsymbol{s}$	*Ja*
f	s	s	f	s	f	s	s	*Nej*
f	s	f	s	s	s	s	$\boldsymbol{s}$	*Ja*
f	s	f	f	s	f	s	f	*Nej*
f	f	s	s	s	s	f	s	*Nej*
f	f	s	f	s	s	f	s	*Nej*
f	f	f	s	s	s	f	s	*Nej*
f	f	f	f	s	s	f	f	*Nej*

Resonemang: Det finns även här tre premisser numrerade från 1-3. I kolumnen "*Alla Uppfyllda*" anger igen vi om alla premisser är uppfyllda eller ej. Som synes finns totalt fem rader där alla premisser är uppfyllda. Slutledningsregeln kräver att vi kan dra slutsatsen att $r \vee w$ har sanningsvärdet *Sann* på dessa rader och som vi ser är detta fallet på dessa fem rader. De aktuella sanningsvärdena är markerade i fet stil ($\boldsymbol{s}$).

2. Mängdlära. För godtyckliga mängder A, B, C visa att formeln

$$(A \cap B) \cup C \subset (((A \cup B) - C) - (A \cap B))^c$$

gäller.

Lösning: Vi kallar de båda mängduttrycken i formeln för VL och HL. Vi arbetar med höger led:

$$HL = (((A \cup B) - C) - (A \cap B))^c = (((A \cup B) \cap C^c) \cap (A \cap B)^c)^c =$$

$$((A \cup B)^c \cup C) \cup (A \cap B) = (A \cup B)^c \cup (C \cup (A \cap B)) = (A \cup B)^c \cup VL.$$

Eftersom vi tydligen har $HL = en\ mängd \cup VL$ så följer $VL \subset HL$ vilket skulle visas.

3. Funktioner. Låt f, g beteckna funktioner med $f : A \to B$ respektive $g : B \to C$ och beteckna med h sammansättningen $g \circ f$. Den ena utsagan nedan är falsk och den andra är sann. Välj en av dessa utsagor. Om du väljer den sanna utsagan, bevisa den. Om du väljer den falska utsagan ge exempel på funktioner g, f som visar att den är falsk.

$$g, f \text{ är bijektiva } \Rightarrow h \text{ är bijektiv}$$

$$h \text{ är bijektiv } \Rightarrow f \text{ eller } g \text{ är bijektiva}$$

Lösningar: Den första är sann och det ser vi genom att visa att $g \circ f$ är injektiv och surjektiv. Injektiviteten ser vi genom att konstatera att eftersom både g, f är injektiva så kan vi skriva

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

vilket visar att h är injektiv. För att visa att h är surjektiv låter vi x, y, z beteckna element i A, B, C. För godtyckligt $z \in C$ har vi då, pga g's surjektivitet, att det finns ett $y \in B$ med $g(y) = z$. För detta y finns, pga f's surjektivitet ett $x \in A$ med $y = f(x)$. Sammantaget har vi $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Eftersom z var godtyckligt i C har vi alltså visat att $h = g \circ f$ är surjektiv. Då h är både surjektiv och injektiv må ste h vara bijektiv, vilket skulle bevisas.

Den andra utsagan är falsk vilket vi kan se genom att studera funktioner $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ och $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ givna av

$$f(x) = x^2$$

respektive

$$g(y) = \text{heltalsdelen av} \sqrt{y}$$

där "heltalsdelen" betyder att vi väljer det heltal som är mindre än eller lika med $\sqrt{y}$. Till exempel har vi

$$g(2) = \text{heltalsdelen av} \sqrt{2} = 1, \quad g(3) = \text{heltalsdelen av} \sqrt{3} = 1, \quad g(4) = \text{heltalsdelen av} \sqrt{4} = 2.$$

Vi har nu

$$g(f(x)) = \text{heltalsdelen av} \sqrt{x^2} = \text{heltalsdelen av} x = x$$

det vill säga $g \circ f = \iota$, som är bijektiv. Men som vi sett i exemplena ovan är inte g injektiv ($g(2) = g(3)$) så g är alltså inte bijektiv.

4. Inledande talteori. Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna den multiplikativa inversen till 15 modulo 17 och använd den för att finna alla heltal x som uppfyller

$$15x \equiv 8 \pmod{17}.$$

Lösning: Vi har

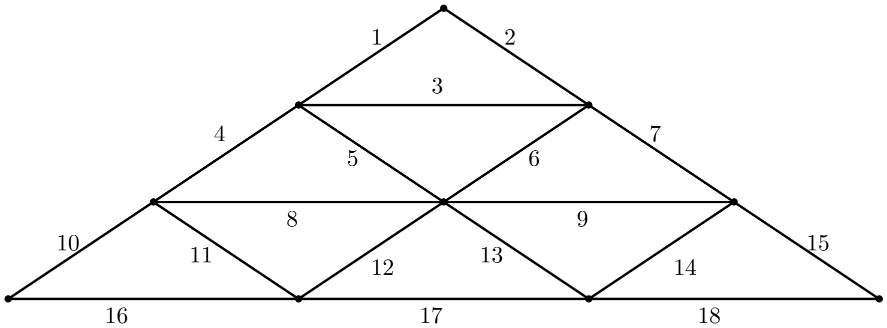
$$17 = 1 \cdot 15 + 2, \quad 15 = 7 \cdot 2 + 1, \quad 1 = 15 - 7 \cdot 2 = 15 - 7 \cdot (17 - 15) = 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17$$

så att $8 \cdot 15 \equiv 1 (\text{mod } 17)$, det vill säga den multiplikativa inversen till 15 modulo 17 är 8. Detta ger

$$15x \equiv 8 \pmod{17} \Leftrightarrow 8 \cdot 15x \equiv 8 \cdot 8 \pmod{17} \Leftrightarrow 1 \cdot x \equiv 64 \pmod{17}$$

som reduceras till $x \equiv 13 (\text{mod } 17)$ som är svaret.

7. Grafteori. Finn ett minsta uppspännande träd i nedanstående graf och ange dess vikt. Du behöver inte redogöra för alla detaljer i din lösning, det räcker med att ange ett minsta uppspännande träd och dessa vikt.



Lösning: Vi väljer successivt kanter av ökande vikt och undviker att bilda cykler. Eftersom alla kanter har olika vikter kan vi identifiera en kant genom att ange dess vikt. Vi kommer då att välja kanter i följande ordning:

1: Kant 1.
2: Kant 2.
3: Kant 4. (*inte kant 3 eftersom en cykel – 123 – då skulle uppkomma*)
4: Kant 5.
5: Kant 7. (*inte kant 6 eftersom en cykel – 1562 – då skulle uppkomma*)
6: Kant 10. (*inte kanter 8 eller 9 eftersom cykler då skulle uppkomma*)
7: Kant 11.
8: Kant 13.
9: Kant 15.

Total vikt: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 11 + 13 + 15 = 68$.

8. Kombinatorik. På ett kalas serveras sju sorters goda kakor. Vi vill äta alla sorters kakor och vi kan äta totalt högst 10 kakor. På hur många olika sätt kan vi äta precis 10 kakor om vi verkligen vill se till att äta kakor av alla sju sorter? I vilket ordning som vi äter kakorna spelar ingen roll.

Lösning: Vi kan modellera detta problem som att vi vill placera precis 10 identiska kulor i 7 olika urnor och placera minst en kula i varje urna. Vi kan göra detta i två steg:

1. Placera en kula i varje urna. Det finns endast ett sätt att göra det (kulorna var ju identiska).
2. Placera de $k = 3$ kvarvarande kulorna hur som helst i de $n = 7$ urnorna. Enligt en formel kan detta göras på
$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+7-1}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 12 \cdot 7 = 84.$$

Enligt multiplikationsprincipen blir svaret $1 \cdot 84 = 84$ olika sätt att äta kakor på det här sättet.