Fx-skrivning 2 – Maj 2022

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen, ingen miniräknare. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket.

Ordinarie skrivtid är 3 timmar.

Fullständiga och korrekta motiveringar krävs för alla uppgifter om inget annat anges i aktuell uppgift.

1. Logik. De logiska konnektiven $\wedge$, $\vee$ och $\neg$ hänger ihop med logiska grindar i digitaltekniken. Vi har ju och-grindar, eller-grindar och inverteringsgrindar. Ett annat logiskt konnektiv som kallas *Scheffers streck* som skrivs med $|$ definieras som

$$p|q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

som kan sägas motsvara en NAND-grind ("Not-And"). Konnektiv kan ibland skrivas om med andra konnektiv och definitionen ovan anger hur Scheffers streck skrivs om med negation och konjunktion. DeMorgans lagar kan sägas ange hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion respektive hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion enligt

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Scheffers streck har den säregna egenskapen att vi kan skriva om en utsaga som innehåller olika konnektiv till en ny ekvivalent utsaga som *bara* innehåller Scheffers streck, alltså inga konjunktioner, inga disjunktioner, inga negationer, bara Scheffers streck och förstås parenteser. Skriv om följande utsaga genom att bara använda Scheffers streck och parenteser:

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$$

Ledning: Börja med att skriva om de grundläggande utsagorna $p \wedge q$, $p \vee q$ och $\neg p$ med endast Scheffers streck och parenteser. Till exempel har vi $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p|p$. När du vet hur du skriver om dessa grundläggande utsagor så kan du använda det på den stora utsagan ovan. Parenteser är förstås acceptabla och faktiskt kommer det att bli *många* parenteser i svaret.

2. Mängdlära. Vi betecknar som vanligt med $A \oplus B$ den symmetriska differensen mellan mängderna A, B som mängden $(A - B) \cup (B - A)$. De distributiva lagarna vore bra om de gällde. De kan formuleras

1. $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$,
2. $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$.

Problemet är bara att ingen av dessa lagar gäller. Bevisa att ingen av dessa lagar gäller genom att ange exempel på mängder A, B, C som inte uppfyller den första lagen och (kanske andra) mängder A, B, C som inte uppfyller den andra lagen. För att ange en fullständig lösning behöver du också explicit räkna ut vad VL (vänster led) och HL (höger led) är för alla dina exempel och verkligen visa att $VL \neq HL$. (Dumt att kalla dessa för "lagar" då men, ja, det får bli så just här.)

3. Funktioner. Beteckna med $\mathbb{N}$ de naturliga talen, alltså de positiva heltalen $1, 2, 3, \ldots$. Vi inför en annan funktion, $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ genom att säga att $i(x)$ är det största heltalet som är mindre än eller lika med $\sqrt{x}$. (Till exempel har vi $i(1) = 1$, $i(2) = 1$ och $i(4) = 2$. Låt nu vidare funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara given av $f(x) = x^2$. Visa följande tre saker:

1. f är inte bijektiv.
2. i är inte bijektiv.
3. $i \circ f$ är bijektiv.

4. Inledande talteori. Låt a, b, c vara siffror i ett tresiffrigt tal abc. Visa att

$$11|abc \Leftrightarrow 11|a - b + c.$$

(Att a, b, c är siffror betyder att de är heltal $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ där $a \neq 0$ eftersom vi har ett tresiffrigt tal).

5. Relationer. Vi inför mängden A som består av heltal genom

$$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 11, 13, 17\}$$

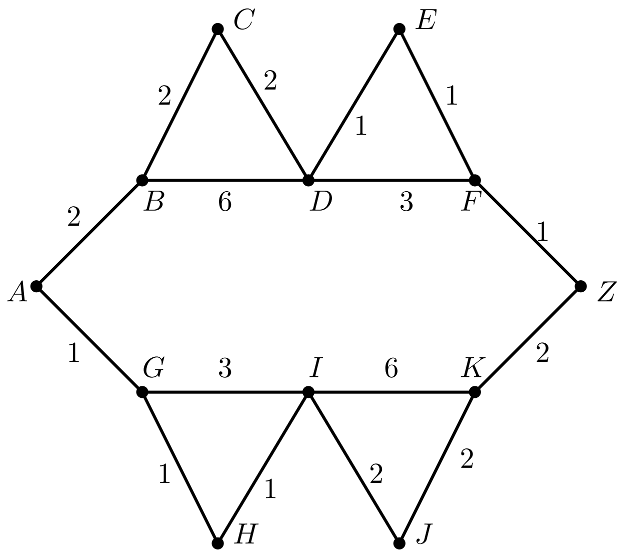
och definerar relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3|x + 2y.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på A och ta fram ekvivalensklasserna.

6. Fördjupad talteori. För alla heltal $n \geq 2$ visa, med matematisk induktion, att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

7. Grafteori. *(a)* Använd Dijkstras algoritm för att i nedanstående graf hitta kortaste vägen mellan hörn A och hörn Z. Redovisa samtliga steg med samtliga kandidatetiketter. *(b)* Finns det mer än ett alternativ till kortaste väg? Ange i så fall ett sådant alternativ.



8. Kombinatorik. Låt p vara ett primtal > 2. För vilka värden på det positiva heltalet a saknar binomialutvecklingen av $(x^a + \frac{1}{x^a})^p$ konstantterm?

9. Sannolikhetslära. Låt A, B, C vara tre händelser med $P(A \cap B \cap C) = 0$. Visa att

$$P(A \cup B \cup C) = P(A - C) + P(B - A) + P(C - B).$$