Tentamen i CM1000 – Diskret Matematik, april 2022

Delar

Tentamen har tre delar. Den första delen – Del I – består av nio problem som svarar mot kursens nio delområden. De problem som svarar mot delområden som tidigare är avklarade från kursens tidigare skrivningar behöver inte lösas. För lägsta godkända betyg (E) måste alla nio delområden vara avklarade. Den andra delen – Del II – består av ett problem som ni kan lösa för betyg C, för att få betyg C måste dock kraven för betyg E vara uppfyllda. Den sista delen – Del III – består av ett problem som ni kan lösa för att få betyg A. Om ni uppfyller kraven för betyg C och klarar det problemet från del III uppfyller ni kraven för betyg A. Betyg B respektive D reserveras för situationer där studenter försökt på högre betyg men inte riktigt nått fram. Ingen poängsättning sker, varje lösning är antingen helt rätt eller helt fel – dock bedöms inte lösningar som har slarvfel i sig som felaktiga om slarvfelet inte ändrar den logiska strukturen på problemställningen. Om ingenting annat sägs i uppgiften krävs *fullständiga* motiveringar för alla lösningar.

Tillgodoräknande

Om en uppgift som tillhör ett högre betyg löses korrekt och den uppgiften kan sägas *täcka* ett av de grundläggande nio delområdena, så kan lösningen av den uppgiften tillgodoräknas för det grundläggande delområde som täcks av högrebetygsuppgiften – det delområdet anses då avklarat. Det betyder att om ni misslyckas med en lösning av ett problem i Del I så kan ni ändå få det området avklarat om ni klarar av att lösa en motsvarande högrebetygsuppgift. I alla uppgifter för högre betyg anges vilken uppgift i Del I som de kan täcka. Om ni känner er osäkra på er lösning av någon uppgift i Del I kan ni också ge en lösning för en högrebetygsuppgift som täcker den uppgift ni är osäkra på.

Del I

1. Logik. Låt p, q, r beteckna godtyckliga utsagor. Ge utredningar om följande två logiska ekvivalenser gäller eller inte. Det vill säga, för varje ekvivalens, om den gäller ge ett bevis, om den inte gäller ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som illustrerar att den inte gäller:

$$(p \vee q) \to (r \vee q) \Leftrightarrow (p \to r) \vee q \qquad (p \wedge q) \to (r \wedge q) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge q.$$

(Sanningstabeller är tillåtna.)

2. Mängdlära. Vi kan bilda oändliga unioner och snitt lika lätt som ändliga unioner och snitt. Om $A_1, A_2, A_3, \dots$ är en oändlig följd av mängder kan vi göra dessa definitioner:

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : (\exists n : x \in A_n)\} \qquad \text{respektive} \qquad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : (\forall n : x \in A_n)\}.$$

Låt nu $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -1/n < x < 1/n\}$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Vad är $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ respektive $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$? Fullständig motivering krävs.

3. Funktioner. Betrakta nedanstående två mängder. Den ena av dem är en funktion och den andra är inte en funktion. Avgör och motivera fullständigt vilken som är vilken.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge y + 1 > x\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (y-1)^2 \wedge x + 2y \geq 2 \wedge x \leq 1\}$$

4. Inledande talteori. Låt n vara ett positivt heltal och låt p vara ett primtal med $p|(n+1)! + 1$. Visa att $p > n$.

5. Relationer. Låt mängden $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ vara given. Definera $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| > n.$$

Här är $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Undersök vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet som denna relation har. Motivera dina slutsatser fullständigt.

6. Fördjupad talteori. För alla heltal $n \geq 2$ visa, med matematisk induktion, att $\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3$.

7. Grafteori. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. V är alltså mängden av hörn och E är alltså mängden av kanter. Visa att följande relation alltid gäller

$$2|E| \leq |V|^2 - |V|.$$

Ledning: Kom ihåg att en graf (till skillnad fraån en pseudograf) inte kan innehålla kanter med samma hörn som ändpunkter och två hörn kan max ha en kant mellan sig.

8. Kombinatorik. Låt $n > 0$ vara ett godtyckligt heltal. Visa att

$$\sum_{0 \leq k \leq n,\ k\ udda} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq k \leq n,\ k\ jämnt} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Till exempel har vi för $n = 4$:

$$\sum_{0 \leq k \leq 4,\ k\ jämnt} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

och

$$\sum_{0 \leq k \leq 4,\ k\ udda} \binom{4}{k} = \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

Ledning: Studera binomialutvecklingen av $(a + b)^n$ där a, b väljs på ett lämpligt sätt.

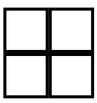
9. Sannolikhetslära. Två tärningar kastas. Vi inför tre händelser:

$A =$ Tärningssumman är 3.
$B =$ Tärningssumman är 7.
$C =$ Minst en av tärningarna visar en etta.

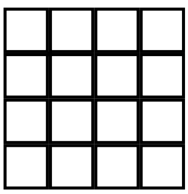
(a) Beräkna $P(A|C)$
(b) Beräkna $P(B|C)$
(c) Är händelserna A och C oberoende? Hur är det med B och C? Är de oberoende?

Del II

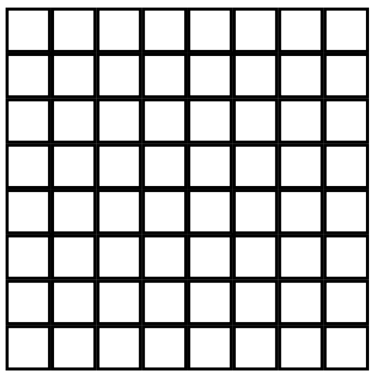
10. För C. *(Kan även täcka område 6 – fördjupad talteori.)* Betrakta, för $n \geq 1$ ett kvadratiskt rutnät med sidlängden 2^n rutor:



$n = 1, 2^n = 2$

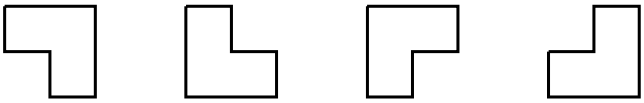


$n = 2, 2^n = 4$

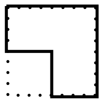


$n = 3, 2^n = 8$

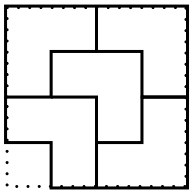
Vi studerar hur en kvadrat med sidan 2^n kan täckas av så kallade gnomoner. En gnomon består av tre intilliggande kvadrater som tillsammans täcker alla utom en av kvadraterna i en kvadrat med sidan två rutor, det finns fyra varianter av en gnomon beroende på hur vi orienterar den:



Bevisa, med matematisk induktion, att varje kvadrat med sidlängden 2^n rutor, där n är ett positivt heltal (≥ 1) kan täckas av $(2^{2n}-1)/3$ så kallade ”gnomoner” på ett sådant sätt att endast en ruta i ett av hörnen inte blir övertäckt. För att förtydliga vad som menas ger vi här övertäckningarna för $n = 1$ respektive $n = 2$:



$n = 1, 2^n = 2$



$n = 2, 2^n = 4$

Observera: Du behöver dels visa formeln, att antalet gnomoner blir $(2^{2n}-1)/3$ och dels visa att alla dessa gnomoner *verkligen* täcker över kvadraten med sidan 2^n på det angivna sättet.

Ledning: Att övertäckningen existerar behöver visas med en geometrisk skiss i den matematisk induktionen. Eftersom de första två övertäckningarna redan är givna behöver du inte ta första steget i induktionsbeviset, bara hänvisa till skissen ovan för $n = 1$, för att ta induktionssteget från $n = p$ till $n = p+1$ kan det vara bra att veta att om en mängd gnomoner täcker över en kvadrat på det angivna viset så kan vi rotera övertäckningen och få en ny liknande övertäckning som täcker kvadraten men där en ruta i ett annat hörn inte är övertäckt. (Vi räknar inte antalet övertäckningar, vi ska bara visa att det finns övertäckningar av det angivna slaget.)

Del III

11. För A. *(Kan också täcka område 4, Inledande Talteori.)* Vi låter a, b, c beteckna godtyckliga heltal. Om vi har

$$a|b+c, \qquad b|a+c, \qquad c|a+b$$

så kan vi skriva det som att det finns $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ sådana att

$$b+c = ak_1, \qquad a+c = bk_2, \qquad a+b = ck_3.$$

Vi inskränker oss nu till specialfallet då $k_1 = k_2 = k_3$ och vi betecknar det gemensamma värdet med k. Undersök för vilka a, b, c, k detta är möjligt då minst en av a, b, c är skild från noll.