Tentamen i CM1000 – Diskret Matematik, januari 2022

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen, ingen miniräknare. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket. Inlämning sker i form av fotograferade handskrivna lösningar i aktuell Quiz på kurswebben. Om ni av någon anledning inte kan scanna in en fil och måste mejla den till mig, ladda istället upp en platsmarkörsfil och mejla er lösning till mig. Jag kan inte rätta uppgifter som inte har uppladdade bildfiler och observera att om ni trycker på "skicka in"/"submit" så kan ni inte längre lämna in några lösningar. Om ni mejlar en lösning till mig *måste* också detta föregås av en diskussion med mig (ansvarig lärare) på skrivningens zoommöte under skrivtiden, eller ett telefonsamtal: 08-7909473.

Skrivtiden är de normala 5 timmarna för en tentamen plus 60 minuter extra tid för bildhantering & uppladdning, skrivningen tillgängligörs några minuter innan 8.00 på kurswebben och sista (ordinarie) inlämningstid blir alltså 14.00. Observera att all behandling av alla uppgifter och all hantering med inlämning ska ske under denna tid. Annars rättas inte lösningarna. Det är Canvas tidsstämplar som gäller. (Några har förlängd skrivtid och motsvarande klockslag för dem är 17.00.) Till denna skrivning hör en muntlig tentamen (för några) och de uppgifter som kan användas för muntlig tentamen är **2**, **3**, **5** och **6**. Del I innehåller uppgifter som krävs för godkänt och delarna II och III är för högre betyg. Fullständiga och korrekta motiveringar krävs för alla uppgifter.

## Del I – För betyg E

**1. Logik.** Visa att nedanstående härledning är korrekt utan att använda sanningstabeller och redovisa i varje steg vilka slutledningsregler som används (*Modus Ponens*, *Modus Tollens*, etc.)

1. $p \to q$
2. $q \to p \vee r$
3. $r \to \neg(p \oplus q)$

$\therefore\; p \leftrightarrow q$

*Ledning:* Utan motivation kan du använda att $p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$. Det är lättast att göra detta genom ett indirekt bevis, men även andra strategier fungerar. Var i vilket falls som helst mycket noggrann med den logiska strukturen och ange i synnerhet alltid om slutsatser vilar på antaganden.

**2. Mängdlära.** Utan att använda Venndiagram, visa, för alla godtyckliga mängder $A, B, C$ identiteten

$$(A \cup B \cup C) - (B \cap C) = (A - (B \cup C)) \cup (B \oplus C).$$

Här betyder $B \oplus C$ mängden $(B - C) \cup (C - B)$.

*Ledning:* Använd distributiva lagarna för mängder för att skriva om vänster och höger led men också uttrycket för $B \oplus C$. (Det finns förstås andra lösningsmetoder.)

**3. Funktioner.** Vi betraktar funktioner på mängden $\mathbb{R}^2$, det vill säga funktioner som tar punkter ur planet och avbildar på planet. Ett exempel på en sådan funktion som vi ska studera är

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)), \text{ där } g_1(x, y) = x + y \text{ och } g_2(x, y) = x - y.$$

Vi har då till exempel

$$g(1, 2) = (g_1(1, 2), g_2(1, 2)) = (1 + 2, 1 - 2) = (3, -1) \qquad g(2, 1) = (g_1(2, 1), g_2(2, 1)) = (2 + 1, 2 - 1) = (3, 1).$$

Låt nu $a, b$ beteckna godtyckliga reella tal och studera funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (ax + by, bx + ay).$$

För varje par av reella tal $a,b$ uppstår en sådan funktion. Ange det krav som $a, b$ måste uppfylla för att funktionen $h = f \circ g$ ska vara bijektiv.

**4. Inledande talteori.** Visa, för alla heltal $a, b, c$ att

$$\gcd(a,b) = \gcd(a+bc, a+b(c-1)).$$

*Ledning:* Visa att $d$ är en gemensam delare till $a, b$ om och endast om $d$ är en gemensam delare till $a+bc$ och $a+b(c-1)$, dra därefter den önskade slutsatsen.

**5. Relationer.** Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 2 \vee x \equiv y \pmod 3.$$

Ge en fullständig utredning som redovisar och motiverar vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet som den här relationen har eller inte har. (För varje egenskap: motivera om den har egenskapen eller inte.)

**6. Fördjupad talteori.** Visa med matematisk induktion att för varje heltal $n \geq 4$ gäller $8n+4+2^n \leq 2 \cdot 3^n$.

*Ledning:* Du får utan motivering använda att funktionen $h(n) = 3^n - 2^n$ är växande för $n \geq 4$.

**7. Grafteori.** Rita en graf med följande egenskaper:

1. Den är sammanhängande.
2. Den har en delgraf som är isomorf med $K_3$.
3. Den har en delgraf som är isomorf med $K_{3,2}$.
4. Den har max 5 hörn och max 8 kanter.

Ange *tydligt* de delgrafer som ska finnas i grafen som uppfyller krav 2 och 3. Använd *två* olika skisser för detta, en för att att visa att krav 2 är uppfyllt och en annan för att visa att krav 3 är uppfyllt.

**8. Kombinatorik.** Låt $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, de första 1000 positiva heltalen. Beräkna antalet element i mängden

$$M = \{x \in \Omega : \gcd(x, 999) = 1\}.$$

**9. Sannolikhetslära.** Vi har tre urnor, $U_1$, $U_2$ och $U_3$. $U_1$ innehåller två blåa kulor. $U_2$ innehåller en blå och en gul kula och $U_3$ innehåller två gula kulor. Betrakta följande slumpprocess:

1. En av urnorna $U_2$ och $U_3$ väljs slumpmässigt.
2. En slumpvis vald kula i den valda urnan byter plats med en slumpvis vald kula i $U_1$.
3. En kula väljs slumpvis ur $U_1$

Beräkna sannolikheten att den slumpvis valda kulan ur $U_1$ i sista steget är blå.

*Ledning:* Du kan förenkla formuleringen av problemet innan du inför händelser.

## Del II

**10. För betyg C.** *Kan även täcka delområde 4, inledande talteori.* Låt $m$ vara ett positivt heltal och beteckna med $\overline{x}$ restklassen i $\mathbb{Z}_m$. Visa följande påstående:

$$m > 2 \Rightarrow |\{\overline{1^2}, \overline{2^2}, \ldots, \overline{m^2}\}| < m.$$

## Del III

**11. För betyg A.** *Kan även täcka delområde 6, fördjupad talteori.* En så kallad differensekvation är en ekvation som definierar en talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rekursivt. Vi studerar en sådan av andra graden:

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

där $a_0$ och $a_1$ väljs som startvärden och som rekursivt definierar värdena på alla efterföljande $a_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Vi har även $q \neq 0$ i de ekvationer vi studerar. Visa följande påstående med stark matematisk induktion:

Om $r_1, r_2$ är lösningarna till den karakteristiska ekvationen $r^2 = pr + q$ där $r_1 \neq r_2$ så finns konstanter $C, D$ sådana att $a_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.