Kontrollskrivning 4 – CM1000, Diskret Matematik, HT2021

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket. Ingen miniräknare är tillåten.

Skrivtiden är 1 timme och 45 minuter med start 14:15 och sista inlämning 16:00. Sent inlämnade skrivningar rättas inte. (Några har förlängd skrivtid och motsvarande för dem klockslag är 17.00.) Fullständiga lösningar krävs normalt till alla uppgifter. Till denna KS hör ingen muntlig tentamen.

1. Logik. I den här uppgiften låter vi p, q, r beteckna godtyckliga utsagor. Betrakta nedanstående två påståenden:

$$r \to (q \to \neg p) \Leftrightarrow p \to (q \to \neg r) \qquad p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (r \to p)$$

Ett av påståendena är sant för alla utsagor p, q, r och ett av dem är inte sant för alla utsagor p, q, r. Bevisa det påstående som är sant och ge exempel på en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som visar att det påstående som inte gäller för alla p, q, r verkligen inte gäller för alla p, q, r. Alla metoder är tillåtna.

Lösning: Det första påståendet är sant och vi kan se det genom att skriva

$$r \to (q \to \neg p) \Leftrightarrow r \to (\neg q \vee \neg p) \Leftrightarrow \neg r \vee (\neg q \vee \neg p) \Leftrightarrow (\neg r \vee \neg q) \vee \neg p \Leftrightarrow$$

$$\neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \to \neg r) \Leftrightarrow p \to (q \to \neg r).$$

Det andra påståendet måste alltså vara falskt och vi kan se det genom att göra sanningsvärdestilldelningarna

$$p = sann \qquad q = sann \qquad r = falsk$$

Vi får då

$$p \to (q \to r) \Leftrightarrow sann \to (sann \to falsk) \Leftrightarrow sann \to falsk \Leftrightarrow falsk$$

respektive

$$r \to (q \to p) \Leftrightarrow falsk \to (q \to p) \Leftrightarrow sann$$

eftersom en implikation med falskt förled alltid är sann. Vi har alltså hittat en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som visar att andra påståendet inte är sant. (Denna tilldelning kan hittas med hjälp av en sanningstabell.)

2a. Mängdlära. Låt $A \subset E$, $|A| < |E|$ respektive $B \subset F$, $|B| < |F|$. Vi uppfattar då $A \times B$ som en delmängd av ett universum $U = E \times F$ som vi också antar innehåller ett ändligt antal element. Nedan finns två påståenden. Det ena är sant för alla val av A, B, E, F som beskrivits ovan, det andra är *inte* sant för alla val av A, B, E, F som beskrivits ovan. Bevisa det sanna påståendet och för det falska påståendet, ange ett exempel på ett val av mängder A, B, E, F där påståendet inte är sant.

$$\text{Påstående 1: } (A^c \times B^c)^c = (A \times B) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$$

$$\text{Påstående 2: } |(A^c \times B^c)^c| = |A \times B|.$$

Venndiagram är som vanligt inte tillåtna som en del av en lösning, men det är klart att du kan rita diagram och ha i dina anteckningar som du inte lämnar in.

Lösning: Det är det andra påståendet som är falskt och vi kan se det genom att välja

$$A = \{1\}, \quad E = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a\}, \quad F = \{a, b, c\},$$

då har vi $A^c = \{2, 3\}$ och $B^c = \{b, c\}$ och $A^c \times B^c = \{(2, b), (2, c), (3, b), (3, c)\}$

$$|(A^c \times B^c)^c| = |U| - |A^c \times B^c| = 9 - 4 = 5 \neq 1 = |(1, a)| = |A \times B|.$$

Vi ska nu alltså visa att det första påståendet är sant. Vi gör det genom ett elementargument. Vi ska visa att mängderna $(A^c \times B^c)^c$ och $A \times B \cup A^c \times B \cup A \times B^c$ i själva verket är desamma. Vi visar därför att

$$(x, y) \in (A^c \times B^c)^c \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c).$$

Det följer av följande kedja av ekvivalenser:

$$(x, y) \in (A^c \times B^c)^c \Leftrightarrow \neg((x, y) \in A^c \times B^c)) \Leftrightarrow \neg(x \in A^c \wedge y \in B^c) \Leftrightarrow$$

$$\neg(x \in A^c) \vee \neg(y \in B^c) \Leftrightarrow x \in A \vee y \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge (y \in B \vee y \in B^c)) \vee (y \in B \wedge (x \in A \vee x \in A^c)) \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in B^c) \vee (y \in B \wedge x \in A) \vee (y \in B \wedge x \in A^c) \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in B^c) \vee (y \in B \wedge x \in A^c) \Leftrightarrow$$
$$(x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times B^c \vee (x, y) \in A^c \times B \Leftrightarrow$$
$$(x, y) \in (A \times B) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c).$$

Beviset är klart.

2b. Mängdlära. Låt A, B, C beteckna godtyckliga mängder. Visa att vi alltid har

$$(A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)) \cup (A \cap B \cap C)) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C).$$

Ledning: $E \oplus F$ betyder $(E - F) \cup (F - E)$. Det kan vara arbetsamt att försöka visa denna identitet bara med hjälp av mängdregler. Det är bättre att sätta upp ett så kallat *elementargument* och studera utsagorna $p \Leftrightarrow x \in A$, $q \Leftrightarrow x \in B$, $r \Leftrightarrow x \in C$, och om VL och HL betecknar vänster respektive höger led i identiteten som ska visas, visa att

$$x \in VL \Leftrightarrow x \in HL$$

med hjälp av en sanningstabell. Då får ni också utan motivering använda att $A \oplus B \oplus C$ består av de element som ligger i ett udda antal av mängderna A, B, C.

Lösning: Vi inför utsagorna $p \Leftrightarrow x \in A$, $q \Leftrightarrow x \in B$, $r \Leftrightarrow x \in C$. Om

$$VL = (A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)) \cup (A \cap B \cap C))$$

och

$$HL = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$$

så ska vi visa att $x \in VL \Leftrightarrow x \in HL$ så vi studerar dessa båda utsagors logiska struktur:

$$x \in VL \Leftrightarrow x \in (A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)) \cup (A \cap B \cap C)) \Leftrightarrow$$
$$x \in (A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)) \vee x \in (A \cap B \cap C)) \Leftrightarrow$$
$$x \in (A \cup B \cup C) \cap (A \oplus B \oplus C)^c) \vee x \in (A \cap B \cap C)) \Leftrightarrow$$
$$(x \in (A \cup B \cup C) \wedge x \in (A \oplus B \oplus C)^c)) \vee x \in (A \cap B \cap C)).$$

Vi kan nu sätta upp en sanningstabell för $x \in VL = (A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)) \cup (A \cap B \cap C))$:

$p(\Leftrightarrow x \in A)$	$q(\Leftrightarrow x \in B)$	$r(\Leftrightarrow x \in C)$	$x \in (A \cup B \cup C)$	$x \in (A \oplus B \oplus C)^c$	$x \in (A \cap B \cap C)$	$x \in VL$
s	s	s	s	f	s	s
s	s	f	s	s	f	s
s	f	s	s	s	f	s
s	f	f	s	f	f	f
f	s	s	s	s	f	s
f	s	f	s	f	f	f
f	f	s	s	f	f	f
f	f	f	f	s	f	f

Vi går vidare och sätter upp sanningstabellen för $x \in HL = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$. Den får följande utseende:

$p(\Leftrightarrow x \in A)$	$q(\Leftrightarrow x \in B)$	$r(\Leftrightarrow x \in C)$	$x \in (A \cap B)$	$x \in (B \cap C)$	$x \in (A \cap C)$	$x \in HL$
s	s	s	s	s	s	s
s	s	f	s	f	f	s
s	f	s	f	f	s	s
s	f	f	f	f	f	f
f	s	s	f	s	f	s
f	s	f	f	f	f	f
f	f	s	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f

I båda tabellerna ser vi att kolumnerna för $x \in VL$ och $x \in HL$ är identiska, det innebär att $x \in VL \leftrightarrow x \in HL$ vilket innebär precis att $VL = HL$ vilket skulle visas.

3a. Funktioner. För funktioner $f : A \to B$ infördes i kursen för alla mängder $E \subset A$ mängden $f(E)$ genom $f(E) = \{y \in B : x = f(x)\}$. Vi kallade $f(E)$ för *bilden av E genom f*. I den här uppgiften vänder vi på riktningen och för alla mängder $F \subset B$ inför vi *den inversa bilden av F genom f* som mängden

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}.$$

Observera att den här mängden är definierad även om funktionen själv inte är inverterbar. Till exempel, för funktionen $y = f(x) = x^2$ där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har vi $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. (Rita gärna en figur för din egen skull för att bättre förstå vad det handlar om.)

Vi låter nu $f : A \to B$ vara en funktion vilken som helst. Visa följande påstående:

$$f \text{ är injektiv om och endast om för alla mängder } F \subset B \text{ har vi } |F| = 1 \Rightarrow |f^{-1}(F)| \leq 1.$$

Lösning: Vi ska visa ett påstående av typen ”om och endast om”, det är ju en ekvivalens så vi ska visa att de två påståendena

$$\Psi \Leftrightarrow f \text{ är injektiv} \qquad \text{och} \qquad \Phi \Leftrightarrow \text{För alla mängder } F \subset B \text{ vi har } |F| = 1 \Rightarrow |f^{-1}(F)| \leq 1$$

är ekvivalenta. (Vi använder de grekiska bokstäverna Ψ och Φ bara för att göra logiken så tydlig som möjligt.)

$\Psi \Rightarrow \Phi$: Vi antar att $f : A \to B$ är injektiv. Vi ska nu för vilken mängd som helst $F \subset B$ visa implikationen $|F| = 1 \Rightarrow |f^{-1}(F)| \leq 1$. Vi antar därför motsatsen till denna implikation, det betyder att det finns en mängd $F \subset B$ med

$$|F| = 1 \wedge |f^{-1}(F)| > 1.$$

Detta betyder att det finns en mängd $F \subset B$ med ett element, vi kan anta $F = \{y\}$. Vidare har den inversa bilden av $\{y\}$ genom f mer än ett element, det vill säga vi har

$$f(x_1) = y \qquad f(x_2) = y$$

för några $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Men detta motsäger precis att f är injektiv och det kan alltså *inte* finnas någon mängd F av det slaget. Alltså gäller Φ och därmed implikationen $\Psi \Rightarrow \Phi$.

$\Phi \Rightarrow \Psi$: Det visar sig här vara lättare att visa kontrapositionen $\neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi$ så vi antar $\neg\Psi$, dvs att f *inte* är injektiv. Då finns skilda $x_1, x_2 \in A$ med $f(x_1) = f(x_2) = y \in B$. Men detta innebär igen att

$$|\{y\}| = 1 \wedge |\{x_1, x_2\}| = 2 \Rightarrow |\{y\}| = 1 \wedge |\{x_1, x_2\}| > 1$$

och med $E = \{x_1, x_2\} = f^{-1}(F)$ och $F = \{y\}$ har vi ett motexempel på implikationen som krävs vara sann för att Φ ska vara sann, det vill säga vi har visat att $\neg\Phi$ gäller till följd av $\neg\Psi$ vilket fullbordar beviset.

3b. Funktioner. Vi betraktar $\mathbb{R}^3$ som rummet av vektorer med tre komponenter, (x, y, z) och studerar funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$f(1, 0, 0) = (0, 1, 0), \quad f(0, 1, 0) = (0, 0, 1), \quad f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

och även $f(u+v) = f(u) + f(v)$, samt $f(au) = af(u)$, för alla vektorer $u, v \in \mathbb{R}^3$ och reella tal $a \in \mathbb{R}$. Visa att funktionen f är bijektiv.

Lösning: Vi ska visa att f är injektiv och surjektiv och antar därför att

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$$

för två vektorer $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Vi ska nu visa att $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$. Vi kan skriva

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_1, 0, 0) + (0, y_1, 0) + (0, 0, z_1) = x_1 \cdot (1, 0, 0) + y_1 \cdot (0, 1, 0) + z_1 \cdot (0, 0, 1)$$

och liknande för (x_1, y_1, z_1). Då har vi, efter upprepad användning av egenskaperna $f(u + v) = f(u) + f(v)$ och $f(au) = af(u)$ likheten

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_1, 0, 0) + f(0, y_1, 0) + f(0, 0, z_1) = x_1 \cdot f(1, 0, 0) + y_1 \cdot f(0, 1, 0) + z_1 f \cdot (0, 0, 1)$$

som är

$$x_1 \cdot (0, 1, 0) + y_1 \cdot (0, 0, 1) + z_1 \cdot (1, 0, 0) = (z_1, x_1, y_1).$$

Av detta får vi

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow (z_1, x_1, y_1) = (z_2, x_2, y_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \wedge x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

vilket precis ger $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$.

För att visa surjektiviteten kan vi observera att för en godtycklig vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ har vi, genom liknande resonemang som ovan

$$f(y, z, x) = (x, y, z)$$

vi har alltså hittat en vektor som fungerar som argument för f som avbildas på (x, y, z), eftersom (x, y, z) var godtyckligt vald har vi visat surjektiviteten.

Anmärkning: I själva verket kan argumentet för surjektivitet utvidgas till att vi konstaterar att vi faktiskt har *inverterat* f, eftersom f tydligen är inverterbar måste f även vara bijektiv.

4. Inledande talteori. Nedan finns två påståenden, det ena är sant och det andra är falskt. Bevisa det som är sant och visa varför det som är falskt är falskt genom att till exempel ge ett motexempel.

$$\text{Om } (a+b)^2 \text{ är udda så kan både } a^2 \text{ och } b^2 \text{ vara udda.}$$

$$\text{Om } a \not\equiv 0 \pmod 2 \text{ och } a \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ så gäller } a \not\equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow a \equiv 5 \pmod 6.$$

Lösning: Det första påståendet är falskt eftersom

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod 2.$$

Om då både a^2 och b^2 är udda så blir summan $a^2 + b^2$ jämn, men det går inte eftersom $a^2 + b^2 \equiv (a+b)^2$ och $(a+b)^2$ var ju ett udda tal.

I det följande antas kongruenser vara modulo 6 om inte annat anges. Det andra påståendet stämmer, det finns nämligen 6 fall då vi har kongruenser modulo 6: $a \equiv 0$, $a \equiv 1$, $a \equiv 2$, $a \equiv 3$, $a \equiv 4$ och $a \equiv 5$. Om vi inte har $a \equiv 0 (\text{mod } 2)$ så kan inte heller någon av $a \equiv 0$, $a \equiv 2$, $a \equiv 4$ gälla modulo 6. Om vi dessutom inte heller har $a \equiv 0 \pmod 3$ så utesluter det att $a \equiv 3 (\text{mod } 6)$. Vi har alltså då bara kvar fallen

$$a \equiv 1 \pmod 6 \text{ eller } a \equiv 5 \pmod 6.$$

Men den här disjunktionen är av formen $p \vee q$ som är ekvivalent med $\neg p \to q$ (så ser sambandet ut mellan implikationer och disjunktioner) och det som skulle visas är precis implikationen $\neg p \to q$, det vill säga

$$a \not\equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow a \equiv 5 \pmod 6$$

vilket fullbordar beviset.

5a. Relationer. Vi har $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_3$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y = y^2 - x.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och ta fram ekvivalensklasserna.

Ledning: Eftersom $\mathbb{Z}_3$ bara har tre element så blir det *mycket* lätt att ta fram ekvivalensklasserna.

Lösning: Vi ska först visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv och vi låter därför x, y, z beteckna tre helt godtyckliga element i $\mathbb{Z}_3$. Elementen x, y, z är ju restklasser modulo 3 och vi kan därför också uppfatta dem som heltal. *Reflexiviteten* inses genom att studera utsagan $x\mathcal{R}x$ som är sann för alla x eftersom

$$x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 - x \equiv x^2 - x \pmod 3 \Leftrightarrow 0 \equiv 0 \pmod 3 \text{ som är sann.}$$

Innan vi visar symmetrin och transitiviteten kan vi konstatera att vi kan skriva om definitionen av relationen på ett enklare ekvivalent sätt:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y = y^2 - x \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y.$$

Nu ser vi symmetrin och transitiviteten genom att konstatera att vi alltid har

$$x^2 + x = y^2 + y \Leftrightarrow y^2 + y = x^2 + x \text{ detta ger symmetrin eftersom } x, y \text{ är godtyckliga.}$$

$$x^2 + x = y^2 + y \wedge y^2 + y = z^2 + z \Rightarrow x^2 + x = z^2 + z \text{ detta ger transitiviteten eftersom } x, y, z \text{ är godtyckliga.}$$

Sammantaget är relationen en ekvivalensrelation eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

För att finna ekvivalensklasserna kan vi bara kontrollera vilka av elementen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ som är relaterade till varandra. Vi har (minns att vi hela tiden räknar modulo 3):

$$\bar{1}^2 + \bar{1} = \bar{2} \qquad \bar{2}^2 + \bar{2} = \bar{4} + \bar{2} = \bar{6} = \bar{0} = \bar{0}^2 + \bar{0}.$$

Detta visar att $\bar{0}\mathcal{R}\bar{2}$, dessa två ligger alltså i samma ekvivalensklass. Men vi ser också att vi inte har $\bar{1}\mathcal{R}\bar{0}$, det betyder att $\bar{1}$ inte ligger i samma ekvivalensklass som $\bar{0}$ och $\bar{2}$. Vi får alltså *två* ekvivalensklasser:

$$\{\bar{0}, \bar{2}\} \text{ och } \{\bar{1}\}.$$

5b. Relationer. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom följande

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a + k^2 = b.$$

Ge en fullständig utredning av vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet som den här relationen har. Om relationen har en av dessa egenskaper, bevisa detta, om relationen saknar en av dessa egenskaper ge exempel som illustrerar att så är fallet. (Alla egenskaper ska förstås utredas.)

Lösning: Relationen är reflexiv, inte symmetrisk, antisymmetrisk och inte transitiv. Vi visar detta nedan.

Reflexivitet: Om a är ett godtyckligt heltal så gäller

$$a + 0^2 = a \Leftrightarrow \exists k(=0) : a + k^2 = a \Leftrightarrow a\mathcal{R}a$$

alla tal a är alltså relaterade till sig själva vilket precis är reflexivitet.

Symmetri: Vi kan se att relationen *inte* är symmetrisk genom att till exempel observera att $0\mathcal{R}1$ eftersom $0 + 1^2 = 1$, men samtidigt kan inte vi inte ha $1\mathcal{R}0$ eftersom det skulle innebära att det funnes ett heltal k med $1 + k^2 = 0$, men det finns inget sådant heltal. Vi har alltså funnit ett exempel på två tal $a = 0$, $b = 1$ där vi har $a\mathcal{R}b$ men *inte* $b\mathcal{R}a$ vilket visar att relationen inte är symmetrisk.

Antisymmetri: Egenskapen antisymmetri betyder att implikationen

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$$

ska vara uppfylld för alla heltal a, b så vi antar att vi har $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a$ för två godtyckligt valda heltal a, b. Då gäller

$$a + k^2 = b \wedge b + k'^2 = a$$

för några heltal k, k'. Men vi kan addera båda led i dessa likheter och få

$$a + b + k^2 + k'^2 = b + a \Leftrightarrow (a + b) + k^2 + k'^2 = (a + b)$$

och om vi subtraherar $a + b$ från båda led så få vi $k^2 + k'^2 = 0$. Eftersom både $k^2 \geq 0$ och $k'^2 \geq 0$ så med likhet endast för 0 måste vi alltså ha $k = k' = 0$ vilket ger $a = b$ som visar att implikationen gäller. Eftersom a, b var godtyckligt valda följer antisymmetrin.

Transitiviteten: Vi kan se att relationen inte är transitiv genom att konstatera att $0\mathcal{R}1$ (eftersom $0 + 1^2 = 1$) respektive $1\mathcal{R}2$ (eftersom $1 + 1^2 = 2$). Vi har alltså $a\mathcal{R}b$ respektive $b\mathcal{R}c$ om $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$. Men vi har *inte* $a\mathcal{R}c$, vi har alltså inte $0\mathcal{R}2$ eftersom det skulle innebära att det fanns ett heltal k med $0 + k^2 = 2 \Leftrightarrow k^2 = 2$, men 2 är inte en jämn kvadrat (2 är till och med ett primtal!) så det går inte. Relationen är alltså inte transitiv.

6. Fördjupad talteori. Visa, med matematisk induktion, utan att använda kongruensräkning att

$$3 | (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Ledning: Vi uppfattar det som välkänt att $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$, det får alltså användas i lösningen utan vidare motivering. Skriv först om påståendet utan summatecken innan du inleder induktionsbeviset.

Lösning: Vi konstaterar först att vi kan skriva

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = 2(n^2+n) - n = 2n^2 + n = n(2n+1).$$

Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow 3|(n+1)n(2n+1)$. Det kan även skrivas $A(n) \Leftrightarrow 3|2n^3 + 3n^2 + n$. Det vi ska visa kan då skrivas $\forall n \geq 1 : A(n)$. Matematisk induktion utförs i tre steg:

Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ är sann. Vi har

$$A(1) \Leftrightarrow 3|2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1 \Leftrightarrow 2|6 \text{ vilket är sant.}$$

Steg 2. Vi ska nu visa implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ för alla heltal $p \geq 1$. Vi antar därför att $A(p)$ gäller för något godtyckligt heltal $p \geq 1$. Då har vi alltså $3|2p^3 + 3p^2 + p$, det betyder att det finns ett heltal q med $2p^3 + 3p^2 + p = 3q$. Med kraft av detta ska vi nu visa att $A(p+1)$ är sann, det vill säga att

$$3|2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1) \Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{Z} : 2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1) = 3q'.$$

Vi studerar därför $2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1)$ och försöker skriva det som en multipel av 3 (alltså $3q'$):

$$2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1) = 2(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) + 3(p^2 + 2p + 1) + p + 1 =$$

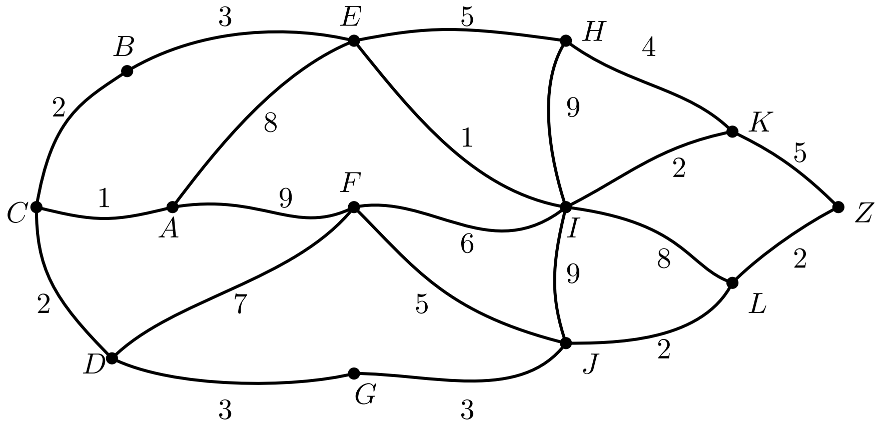
$$2p^3 + 6p^2 + 6p + 2 + 3p^2 + 6p + 3 + p + 1 = 2p^3 + 3p^2 + p + 6p^2 + 6p + 2 + 6p + 3 + 1 =$$

$$\left(2p^3 + 3p^2 + p\right) + 6p^2 + 12p + 6 = 3q + 3 \cdot (2p^2 + 4p + 2) = 3 \cdot (q + 2p^2 + 4p + 2).$$

Här har vi använt induktionsantagandet att $2p^3 + 3p^2 + p = 3q$ och med hjälp av detta och omskrivningarna ser vi att hela uttrycket slutligen kan skrivas som $3q'$ där alltså $q' = q + 2p^2 + 4p + 2$. Detta fullbordar steg 2 i induktionsbeviset.

Steg 3. Steg 1, 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. Finn i nedanstående viktade graf den billigaste vägen från A till Z genom att använda Dijkstras algoritm. Ange alla etiketter för alla hörn men även alla kandidatetiketter i alla delsteg av algoritmen.



Lösning: Vi tar stegen i Dijkstras algoritm, i varje steg anges kandidater i *kursiv* stil och valda etiketter anges i **fet** stil:

Steg 1. **C(A,1)**, *F(A,9)*, *E(A,8)*
Steg 2. **B(C,3)**, **D(C,3)**, *E(A,8)*, *F(A,9)*
Steg 3. **E(B,6)**, **G(D,6)**, *F(A,9)*
Steg 4. *H(E,11)*, *F(A,9)*, **I(E,7)**, *J(G,9)*
Steg 5. **F(A,9)**, **J(G,9)**, *H(E,11)*, **K(I,9)**, *L(I,15)*
Steg 6. **H(E,11)**, *Z(K,14)*, ***L(J,11)***
Steg 7. **Z(L,13)**

Baklänges läsning av etiketterna ger att kortaste vägen blir

$$A \to C \to D \to G \to J \to L \to Z$$

och den har kostnaden 13 (som anges på Zs etikett).

Anmärkning: I den här grafen kunde flera etiketter än en väljas i stegen 2, 3 och 5.

8. Kombinatorik. En av de mest meningsfulla aktiviteter som finns är att placera färgade kulor i urnor och vi ska nu, till vår stora glädje, studera en sådan aktivitet. Vi antar att vi har tre urnor, U_1, U_2, U_3 och ska placera tre identiska gula kulor, tre identiska blå kulor och tre identiska röda kulor i dessa urnor. Men vi ska först ange två regler för hur själva placerandet får gå till:

1. De gula kulorna får läggas hur som helst, hur många gula kulor som helst i vilken urna som helst.
2. Ingen urna får innehålla både blåa och röda kulor, men annars får också de blåa och röda kulorna läggas hur som helst.

Beräkna totala antalet sätt att placera alla kulor om båda dessa regler ska följas.

Lösning: Vi kan se placerandet av kulorna som en slumpprocess i två oberoende steg. Steg 1: placera de gula kulorna – vi antar att detta kan göras på N_1 sätt. Steg 2: placera de röda och blå kulorna – vi antar att detta kan göras på N_2 sätt. Det sökta antalet sätt att placera alla kulor blir då $N_1 \cdot N_2$. Vi går vidare och beräknar N_1 och N_2 var för sig.

N_1: Antal sätt att placera de gula kulorna blir enligt en formel

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 30.$$

(Se bokens kapitel 8, exemplet med Tesla som matade duvor.)

N_2: Vi kan ta ett annat perspektiv på hur de blåa och röda kulorna placeras. Vi har tre urnor, inga blåa eller röda kulor får ligga i samma urna, det innebär att någon urna måste innehålla alla blåa kulor eller så måste någon urna innehålla alla röda kulor, annars kan vi inte uppfylla kravet att ingen urna får innehålla både röda och blå kulor. Vi sätter nu

$A =$ mängden av sätt att placera ut de röda och blå kulorna där alla *blåa* kulor ligger i samma urna.
$B =$ mängden av sätt att placera ut de röda och blå kulorna där alla *röda* kulor ligger i samma urna.

Det sökta antalet N_2 fås nu genom principen för inklusion och exklusion:

$$N_2 = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

och vi beräknar nu $|A|$, $|B|$ och $|A \cap B|$ var för sig.

$|A|$ är antalet sätt att placera ut de röda och blå kulorna där alla tre röda är tillsammans, vi kan se det som en process i tre steg. 1: välj först vilken urna som ska innehålla de tre röda kulorna, det går att göra på 3 sätt. 2: välj sedan hur de blåa kulorna ska vara fördelade. Det finns två urnor kvar att välja på och det finns därför 4 sätt att fördela de blåa kulorna: antingen alla tre i den ena eller den andra urnan, eller 1 blå kula i den ena urnan (och 2 blåa i den andra) eller en blå kula i den andra urnan (och 2 i den ena). Totalt antal sätt att utföra både steg 1 och 2: $3 \cdot 4 = 12$ sätt, alltså har vi $|A| = 12$.

$|B|$ beräknas på precis samma sätt som $|A|$ men med rollerna av blåa och röda kulor omkastade, alltså har vi $|B| = |A| = 12$.

$|A \cap B|$ är antalet sätt att placera de röda och de blå kulorna då alla röda ligger tillsammans i en urna och alla blåa ligger tillsammans i en *annan* urna. Det antalet beräknas genom att konstatera att vi ska först välja vilken urna som ska innehålla alla röda kulor, det kan ske på precis 3 sätt, därefter väljer vi vilken urna som ska innehålla alla blåa, det blir 2 sätt. Totalt antal sätt blir då alltså $3 \cdot 2 = 6$ sätt.

Sammantaget har vi alltså

$$N_2 = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12 + 12 - 6 = 18.$$

Vi sammanställer dessa resultat som slutligen ger oss det sökta antalet $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 18 = 540$.

9. Sannolikhetslära. Vi tar en vanlig sexsidig tärning som vi kallar T och vi betraktar en slumpprocess som har två steg.

1. Vi kastar T en gång och adderar resultatet till en summa S. ($S = 0$ från början.)
2. Om första kastet av T ger ett udda utfall, det vill säga något av resultaten 1, 3 eller 5 kastar vi T en gång till och lägger det nya resultatet till S.

Beräkna sannolikheten att S efter dessa steg är större än eller lika med 6.

Lösning: Vi inför följande händelser:

$U =$ första kastet ger ett udda utfall.
$J =$ första kastet ger ett jämnt utfall.
$Q =$ slutliga tärningssumman S är större än eller lika med 6.

Vi söker $P(Q)$ och enligt satsen om total sannolikhet har vi

$$P(Q) = P(U) \cdot P(Q|U) + P(J) \cdot P(Q|J)$$

så kan vi beräkna dessa ingående sannolikheter så kan vi finna $P(Q)$.

Till att börja med kan vi konstatera att $P(U) = P(J) = 1/2$ eftersom det är lika sannolikt att få jämnt som att få udda utfall på en tärning. Då det gäller $P(Q|J)$ så söker vi alltså sannolikheten att summan $S \geq 6$ givet att vi slagit 2, 4 eller 6 och inte kommer att slå igen. Det är ett av tre utfall som ger $S \geq 6$ nämligen om vi fick 6 i första kastet, det ger oss

$$P(Q|J) = 1/3.$$

För att finna $P(Q|U)$ konstaterar vi att om vi får ett udda utfall och alltså ska slå igen så händer detta om det första utfallet är 1, 3 eller 5. Vi ska alltså till något av dessa resultat addera ett nytt tärningskast. Om vi fick 1 först så blir slutresultatet 2-7, om vi fick 3 först så blir slutresultatet 4-9 och om vi fick 5 först så blir slutresultatet 6-11. Det blir total 18 lika sannolika fall varav 12 fall ger att slutsumman är större än eller lika med 6:

1. Om vi fick 1 först så är de 6, 7 (2 fall av 6)
2. Om vi fick 3 först så är de 6, 7, 8, 9 (4 fall av 6)
3. Om vi fick 5 först så är de 6, 7, 8, 9, 10, 11 (6 fall av 6)

totalt 12 fall av 18 lika sannolika fall och därför blir

$$P(Q|U) = 12/18 = 2/3.$$

Sammantaget så får vi

$$P(Q) = P(U) \cdot P(Q|U) + P(J) \cdot P(Q|J) = 1/2 \cdot 2/3 + 1/2 \cdot 1/3 = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$