2. Mängdlära. Betrakta nedanstående två påståenden. A, B, C betecknar godtyckliga mängder. Det ena påståendet är sant och det andra är falskt. Bevisa det som är sant och visa att det som är falskt verkligen är falskt genom att ta fram tre mängder A, B, C som uppfyller förutsättningarna men inte slutsatsen.

$$A \oplus C = \emptyset \land A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cup C = \emptyset \qquad A \cap C = \emptyset \land B \subset A \cup C \Rightarrow B \subset A \oplus C.$$

Som vanligt får inte Venndiagram användas i ett formellt bevis, men de kan användas i privata anteckningar för att finna tre mängder A, B, C som uppfyller förutsättningarna förledet i den falska utsagan men inte slutsatsen. Och symbolen $\oplus$ betyder mängdoperationen "symmetrisk differens" som ges av $E \oplus F = (E - F) \cup (F - E)$.

Lösning: Det första påståendet är falskt och vi kan se det genom att välja $A = C = \{1\}$ och $B = \emptyset$. Då har vi $A \oplus C = (\{1\} - \{1\}) \cup (\{1\} - \{1\}) = \emptyset$ och $A \cap B \cap C = \emptyset$ men $A \cup C = \{1\} \neq \emptyset$. Det andra påståendet är sant och vi kan se det genom att skriva

$$A \cup C = A \oplus C \cup (A \cap C).$$

Om vi då har $A \cap C = \emptyset \land B \subset A \cup C$ så kan vi konstatera att

$$B \subset A \cup C = A \oplus C \cup (A \cap C) = A \oplus C \cup \emptyset = A \oplus C$$

vilket visar att det andra påståendet är sant.

4. Inledande talteori. Finn alla heltal x som uppfyller kongruensen $11x \equiv 73 \pmod{13}$. Reducera ditt svar modulo 13.

Lösning: Vi söker den multiplikativa inversen till 11 modulo 13. Euklides utökade algoritm ger

$$13 = 11 \cdot 1 + 1, 11 = 2 \cdot 5 + 1, 1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 5 \cdot (13 - 11) = 6 \cdot 11 - 5 \cdot 13 \Rightarrow 6 \cdot 11 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Den multiplikativa inversen till 11 modulo 13 är alltså 6. Innan vi behandlar den ursprungliga kongruensen kan vi konstatera att $73 \equiv 8 \pmod{13}$ och då kan vi skriva

$$11x \equiv 73 \pmod{13} \Leftrightarrow 11x \equiv 8 \pmod{13} \Leftrightarrow 6 \cdot 11x \equiv 6 \cdot 8 \pmod{13} \Leftrightarrow 1 \cdot x \equiv 48 \pmod{13}$$

och eftersom $48 \equiv 9 \pmod{13}$ kan detta skrivas

$$x \equiv 9 \pmod{13}$$

vilket är det slutgiltiga svaret.

5. Relationer. Låt mängden A vara given av alla par av reella tal (x, y) som uppfyller $x > 0$, det vill säga låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

(b) Beskriv de två olika ekvivalensklasserna som innehåller $(1, 1)$ respektive $(2, 1)$. Rita en tillhörande figur som visar hur dessa ekvivalensklasser ser ut.

Lösning: *(a)* Vi ska visa att relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Vi kan först konstatera att eftersom alla x-värden alltid är > 0 så är alltid alla uttryck på formen y/x väldefinierade. I det följande betecknar $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ godtyckliga element ur A.

Reflexivitet: vi ser denna genom att konstatera att

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{y_1} \Leftrightarrow (x_1, y_1)\mathcal{R}(x_1, y_1).$$

Eftersom (x_1, y_1) var godtyckligt i A följer reflexiviteten.

Symmetri: nu ska vi visa att $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_2, y_2)\mathcal{R}(x_1, y_1)$. Detta följer direkt av

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Vidare följer transitiviteten också direkt genom

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \land (x_2, y_2)\mathcal{R}(x_3, y_3) \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \land \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_3}{x_3} \Leftrightarrow (x_1, y_1)\mathcal{R}(x_3, y_3)$$

och eftersom $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ alla är godtyckliga element ur A.

(b) Vi ska nu beskriva ekvivalensklasserna som innehåller elementen $(1, 1)$ och $(2, 1)$. De ligger i två olika ekvivalensklasser eftersom $(1, 1)\mathcal{R}(2, 1)$ inte gäller. Vi betecknar dessa ekvivalensklasser med $\overline{(1, 1)}$ respektive $\overline{(2, 1)}$ och vi gör två utredningar, en för varje ekvivalensklass (delmängd av A).

$\overline{(1,1)}$: Den här mängden/klassen kan också skrivas

$$\{(x,y) \in A : (x,y)\mathcal{R}(1,1)\} = \{(x,y) \in A : \frac{y}{x} = \frac{1}{1}\} = \{(x,y) \in A : \frac{y}{x} = 1\} = \{(x,y) \in A : y = x\}.$$

Här ser vi att ekvivalensklassen tydligen består av alla punkter på linjen $y = x$ för vilka $x > 0$.

$\overline{(2,1)}$: Läsaren får själv övertyga sig om att motsvarande mängd här blir mängden av alla punkter på linjen $y = x/2$, där $x > 0$.

Vi avstår från att ge en skiss här, det är bara fråga om att rita upp höger halvplan av $\mathbb{R}^2$ $(x > 0)$ och rita in två linjer $y = x$ respektive $y = x/2$. Det krävs dock en sådan skiss för godkänt på uppgiften.

6. Fördjupad talteori. Använd matematisk induktion för att visa att för alla positiva heltal $n > 0$ gäller

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ och kallar $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ för VL_n respektive $\frac{n}{2n+1}$ för HL_n. Vi ska alltså visa

$$\forall n > 0 : A(n) \text{ som också kan skrivas } \forall n > 0 : VL_n = HL_n.$$

(n är underförstått att referera till positiva heltal.)

Matematisk induktion utförs i tre steg:

Steg 1. Visa att $A(1)$ gäller, det vill säga visa att $VL_1 = HL_1$. Vi räknar ut dessa båda tal och finner

$$VL_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4\cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3} \quad \text{respektive} \quad HL_1 = \frac{1}{2\cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

och eftersom de båda uppenbarligen är lika måste $A(1)$ vara sann vilket fullbordar steg 1.

Steg 2. Vi ska nu visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann för alla heltal $p > 0$ och vi antar därför att $A(p) \Leftrightarrow VL_p = HL_p$ gäller för något vissat värde på p. Vi har då alltså

$$A(p) \Leftrightarrow VL_p = HL_p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{p}{2p+1}$$

och med kraft av detta ska vi visa att

$$A(p+1) \Leftrightarrow VL_{p+1} = HL_{p+1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{p+1}{2(p+1)+1}$$

gäller. Vi arbetar därför med VL_{p+1}:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(p+1)^2-1} = \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4(p+1)^2-1}$$

där vi för att komma till sista likheten har ersatt $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4k^2-1}$ som är VL_p med HL_p som är $\frac{p}{2p+1}$. Vårt mål är att visa att detta är VL_{p+1}, det vill säga vi vill komma fram till att

$$\frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4(p+1)^2-1} = \frac{p+1}{2p+3}.$$

Gäller det då? Ja, vi har

$$\frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4(p+1)^2-1} = \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4p^2+8p+3} = \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{(2p+3)(2p+1)}$$

där har vi faktoriserat $4p^2 + 8p + 3$ och skrivit $4p^2 + 8p + 3 = (2p+3)(2p+1)$. Vi förlänger därefter $\frac{p}{2p+1}$ med $(2p+3)$ och får att hela uttrycket blir

$$\frac{p(2p+3)}{(2p+1)(2p+3)} + \frac{1}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{p(2p+3)+1}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{2p^2+3p+1}{(2p+3)(2p+1)}$$

och här kan $2p^2 + 3p + 1$ faktoriseras som $(p+1)(2p+1)$ så att hela uttrycket får det slutliga utseendet

$$\frac{2p^2+3p+1}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{(p+1)(2p+1)}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{(p+1)}{(2p+3)}$$

vilket precis är HL_{p+1}. Vi har alltså visat att $VL_p = HL_p$ medför att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ det vill säga implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för godtyckliga heltal $p > 0$. Detta fullbordar steg 2. *(Anmärkning: vi hade inte behövt göra de här smarta faktoriseringarna, vi skulle kunnat rent rått bara räknat ut rent algebraiskt att* $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ *utan att veta att till exempel* $(p+1)(2p+1) = 2p^2+3p+1$ *och liknande.)*

Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.