1. Logik. Nedan finns ett svarsformulär med fyra kolumner och ett antal rader. I de två första kolumnerna anges två utsagor. Du ska avgöra om dessa utsagor är ekvivalenta eller inte ekvivalenta och på samma rad kryssa i den ruta som anger vad som gäller. De två första raderna har exempel som visar mer konkret vad som menas. Fyll i resten av raderna så att formuläret blir rätt ifyllt. Du får ha högst ett fel för godkänt på uppgiften. En rad med ingen ruta ikryssad räknas som ett fel. ($p \oplus q$ betyder $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$.)

Utsaga 1	Utsaga 2	Svarsalternativ 1	Svarsalternativ 2
$p \to q$	$\neg p \vee q$	☒ Ekvivalenta	☐ Inte ekvivalenta
$p \to q$	$p \vee q$	☐ Ekvivalenta	☒ Inte ekvivalenta
$\neg(p \wedge (q \vee r))$	$q \vee r \to \neg p$	☐ Ekvivalenta	☐ Inte ekvivalenta
$\neg(p \oplus q)$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$	☐ Ekvivalenta	☐ Inte ekvivalenta
$\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$	$\neg p \vee q \vee r$	☐ Ekvivalenta	☐ Inte ekvivalenta
$(r \to \neg q) \to p$	$p \vee (q \wedge r)$	☐ Ekvivalenta	☐ Inte ekvivalenta

Svar: Alla par av utsagor är ekvivalenta utom $\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$ och $\neg p \vee q \vee r$.

2. Mängdlära. Låt A, B, C, D beteckna vilka mängder som helst. Nedan finns två påståenden, det ena är sant och det andra är falskt. Bevisa det som är sant och ge exempel på fyra konkreta mängder som visar att det falska påståendet är falskt.

Antalet element i $A \oplus B \oplus C \oplus D$ är alltid jämnt

Om ett element ligger i $A \oplus B \oplus C \oplus D$ så ligger det i ett udda antal av dessa mängder.

Ledning: Om E, F är mängder så betyder $E \oplus F$ betyder den symmetriska differensen mellan E, F, det vill säga $E \oplus F = (E - F) \cup (F - E)$. Du får utgå från att $\oplus$ är associativ, det vill säga att $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ för alla möjliga mängder A, B, C.

Lösning: Det första påståendet är falskt och det kan vi se genom att välja $A = B = C = \{1\}$ och $D = \emptyset$, alltså de tre mängderna A, B, C är desamma och dessa tas tillsammans med D som väljs till $\emptyset$. Då har vi

$$A \oplus B \oplus C \oplus D = \{1\} \oplus \{1\} \oplus \{1\} \oplus \emptyset = \{1\} \oplus \{1\} \oplus \{1\} = \{1\} \oplus \emptyset = \{1\}.$$

Vi har alltså att antal element i $A \oplus B \oplus C \oplus D$ är 1, ett udda antal. (Det finns inget skäl till varför antalet element i $A \oplus B \oplus C \oplus D$ alltid skulle vara jämnt.)

Det andra påståendet måste alltså vara sant och vi ska alltså visa att för varje element $x \in A \oplus B \oplus C \oplus D$ gäller att detta element x ligger i ett jämnt antal av dessa mängder, alltså i två av dem eller i alla fyra. (Eftersom mängden $A \oplus B \oplus C \oplus D$ bildas av element från element ur mängderna A, B, C, D kan vi inte ha ett fall där ett element $x \in A \oplus B \oplus C \oplus D$ inte ligger i någon alls av A, B, C, D.) Välj alltså ett element $x \in A \oplus B \oplus C \oplus D$ vi vet att x måste finnas i *någon* av mängderna A, B, C, D. Det räcker med att studera följande fall (mängderna kan döpas om så att något av dessa fall alltid gäller):

$$x \in A, x \notin B, x \notin C, x \notin D$$
$$x \in A, x \in B, x \notin C, x \notin D$$
$$x \in A, x \in B, x \in C, x \notin D$$
$$x \in A, x \in B, x \in C, x \in D$$

Vi ska visa att andra fallet och fjärde fallet (som är de enda där x ingår i ett jämnt antal av mängderna) är orimliga.

Allmänt för en symmetrisk differens $E \oplus F$, där $y \in E \oplus F$ gäller följande: y kan bara ligga i *precis en* av E och F. Detta följer av konstruktionen av $\oplus$. I andra fallet har vi alltså

$$x \in A, x \in B, x \notin C, x \notin D \Rightarrow x \in (A \oplus C) \wedge x \in (B \oplus D)$$

vilket ger $x \notin (A \oplus C) \oplus (B \oplus D) = A \oplus B \oplus C \oplus D$ vilket är en motsäglese. På samma sätt, om x ligger i alla fyra mängderna så har vi

$$x \in A, x \in B, x \in C, x \in D \Longrightarrow x \notin A \oplus B \wedge x \notin C \oplus D$$

vilket ger $x \notin (A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = A \oplus B \oplus C \oplus D$ vilket återigen är en motsägelse.

Slutsatsen är att de enda möjligheterna är attt fall 1 och 3 är möjliga vilket svarar precis mot att x ligger i ett udda antal av mängderna A, B, C, D. Resonemanget var allmängiltigt och måste därför gälla alla element $x \in A \oplus B \oplus C \oplus D$ vilket fullbordar beviset.

3. Funktioner. Låt E, F vara två ändliga mängder med precis ett gemensamt element och bilda funktionen f definierad av
$$f(E, F) = |E \times F| - |E| - |F| + 1.$$
Vi ska alltså stoppa in *mängder* som argument till den här funktionen. Visa att
$$f(E, F) = |E' \times F'|$$
där $E' = E - \{x\}$ och $F' = F - \{x\}$ där $\{x\} = E \cap F$.

Lösning: Vi har
$$f(E, F) = |E \times F| - |E| - |F| + 1 = |E| \cdot |F| - |E| - |F| + 1 = (|E| - 1) \cdot (|F| - 1) = |E'| \cdot |F'| = |E' \times F'|$$
där vi använt att $|E'| = |E| - 1$ och $|F'| = |F| - 1$ som gäller eftersom mängderna E och F har precis ett gemensamt element x.

5. Relationer. Studera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_2$ definerad av
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee (x + 1)^2 = y^2.$$
(I hela denna uppgift skriver vi kongruensklasser som tal utan överstreck, vi skriver alltså $1, 2, \ldots$ istället för $\bar{1}, \bar{2}, \ldots$.) Bevisa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Lösning: $\mathcal{R}$ är reflexiv eftersom $x^2 = x^2$ gäller för alla $x \in \mathbb{Z}_2$. Vidare är $\mathcal{R}$ symmetrisk, eftersom i $\mathbb{Z}_2$ gäller $2 = 0$ och $1 = -1$, så vi kan skriva
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee x^2 + 2x + 1 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee x^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$x^2 = y^2 \vee x^2 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee x^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \vee (y + 1)^2 = x^2 \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$
Relationen är alltså både reflexiv och symmetrisk. För att visa att relationen också är transitiv väljer vi x, y, z godtyckligt i $\mathbb{Z}_2$ och antar att $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$. Vi ska nu visa att $x\mathcal{R}z$. Att vi har $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$ betyder att
$$x^2 = y^2 \vee (x + 1)^2 = y^2 \qquad \text{och} \qquad y^2 = z^2 \vee (y + 1)^2 = z^2.$$
Vi kan nu dela upp i fyra fall:

1. $x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2$, detta ger $x^2 = z^2$ som ger $x\mathcal{R}z$.
2. $(x + 1)^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2$, detta ger $(x + 1)^2 = z^2$ som ger $x\mathcal{R}z$.

Det resterande två fallen får läsaren genomföra på egen hand. Slutsatsen är att i alla möjliga falls om uppkommer så har vi $x\mathcal{R}z$ vilket visar transitiviteten. Eftersom relationen har alla tre egenskaper som definierar en ekvivalensrelation är beviset klart.

Ett ännu enklare perspektiv kan vi få genom att observera att i $\mathbb{Z}_2$ finns bara två element och vi har alltid ekvivalensen
$$q = q \Leftrightarrow q^2 = q^2.$$
Minns att vi alltså arbetar med *restklasser* här, inte tal. Detta ger oss
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \vee (x + 1)^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \vee x + 1 = y \Leftrightarrow x = y \vee x \neq y.$$
Vi kan säga att $x = y \vee x + 1 = y \Leftrightarrow x = y \vee x \neq y$ eftersom det bara finns två element ($\bar{0}$ och $\bar{1}$) i $\mathbb{Z}_2$. Men $x = y \vee x \neq y$ är en *tautologi*, det vill säga *alltid sann*. Det betyder att alla (två!) element i $\mathbb{Z}_2$ alltid är relaterade till alla element i $\mathbb{Z}_2$, och en relation där alla element alltid är relaterade till alla andra element är definitivt en ekvivalensrelation. Och det blir bara en stor ekvivalensklass som består av alla element. På sätt och vis en ganska löjlig relation alltså!