Fx-skrivning 2 – Lösningar

1. Logik. Studera nedanstående tre utsagor:

$$(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg(q \oplus r)) \qquad (p \to r) \wedge (r \vee q) \qquad r \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

Två av dessa utsagor är ekvivalenta. Den tredje är inte ekvivalent med de andra två. Gör en utredning som visar klart och tydligt vilka två av utsagorna som är ekvivalenta. Din utredning behöver också motivera varför den tredje utsagan inte är ekvivalent med de andra två. Metod är valfri.

Anmärkning: konnektivet $\oplus$ är "exklusivt eller", dvs $q \oplus r$ är sann precis då exakt en av q och r är sanna.

Lösning: Vi sätter upp en sanningstabell med de tre utsagorna. Vi inför också namn på utagorna enligt

A : $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg(q \oplus r))$
B : $(p \to r) \wedge (r \vee q)$
C : $r \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

Vi bygger sanningstabellen i steg för tydlighetens skull:

p	q	r	$p \wedge r$	$p \to r$	$r \vee q$	$\neg(q \oplus r)$	$\neg p \wedge \neg(q \oplus r)$	A	B	C
s	s	s	s	s	s	s	f	s	s	s
s	s	f	f	f	s	f	f	f	f	f
s	f	s	s	s	s	f	f	s	s	s
s	f	f	f	f	f	s	f	f	f	f
f	s	s	f	s	s	s	s	s	s	s
f	s	f	f	s	s	f	f	f	s	s
f	f	s	f	s	s	f	f	f	s	s
f	f	f	f	s	f	s	s	s	f	f

Vi ser att eftersom kolumnerna för B och C är identiska så måste de vara de två ekvivalenta utsagorna. Eftersom kolumnen för A sklijer sig från de andra kolumnerna på rad 7 kan alltså inte A vara ekvivalent med B och C. (Vi skulle också kunnat visa ekvivalensen mellan B och C genom logiska omskrivningsregler och på det viset sluppit att göra sanningstabell för både B och C.)

2. Mängdlära. Låt mängderna A, B, C, D vara helt godtyckliga och bilda utifrån dessa mängderna

$$S_1 = (A \cup B) \cap (C \cup D) \qquad S_2 = (A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Gäller någon generell delmängdsrelation mellan S_1 och S_2? Vi frågar oss alltså om någon av relationerna

$$S_1 \subset S_2 \quad \text{eller} \quad S_2 \subset S_1$$

gäller generellt, alltså oberoende av vilka mängderna A, B, C, D är. Om någon (eller båda!) av dessa relationer gäller, bevisa det. Om ingen av dessa relationer gäller generellt, ge exempel på fyra mängder för vilka den ena relationen inte är uppfylld och fyra (kanske andra) mängder för vilka den andra relationen inte är uppfylld.

Lösning: Ingen av relationerna gäller, vi kan se det genom att välja

$$A = \emptyset \quad B = \emptyset \quad C = \{1, 2\} \quad D = \{2, 3\}$$

Med dessa val har vi

$$S_1 = (\emptyset) \cap (C \cup D) = \emptyset \quad \text{respektive} S_2 = \{2\}$$

och vi har tydligen inte $S_2 \subset S_1$. Genom att kasta om rollerna av A, B, C, D kan vi också se att vi inte har $S_1 \subset S_2$.

3. Funktioner. Låt $a \in \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x) = ax$. Visa att funktionen är injektiv om och endast om den är surjektiv.

Lösning: Vi ska visa en ekvivalens: f är surjektiv $\Leftrightarrow$ f är injektiv. Beviset får då två delar:

1. f är surjektiv $\Rightarrow$ f är injektiv.
2. f är injektiv $\Rightarrow$ f är surjektiv.

Antag att f är surjektiv. Vi ska nu visa att f ä injektiv. Eftersom f är surjektiv så finns ett x_1 för vilket $f(x_1) = 1$. Men då har vi $ax_1 = 1 \neq 0$, det betyder att $a \neq 0$. Men om $a \neq 0$ så har vi, för godtyckliga s, t implikationen

$$f(s) = f(t) \Rightarrow as = at \Rightarrow s = t$$

vilket precis visar injektiviteten.

Antag omvänt att f är injektiv och låt $s \neq t$. Eftersom f är injektiv så gäller

$$f(s) \neq f(t) \Leftrightarrow as \neq at \Rightarrow a(s-t) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

men om $a \neq 0$ så har ekvationen

$$y = ax = f(x)$$

för godtyckligt y en lösning i x ($x = y/a$) vilket är precis samma sak som att f är surjektiv.

Beviset är klart.

4. Inledande talteori. Antag att $\gcd(a, 4) = \gcd(b, 4) = 2$. Beräkna $\gcd(a + b, 4)$.

Ledning: att $\gcd(a, 4) = 2$ *betyder att* $2|a$ *men att* $2^2 \nmid a$.

Lösning: Att $\gcd(a, 4) = \gcd(b, 4) = 2$ betyder att

$$a = 2k_1 \qquad b = 2k_2$$

där k_1, k_2 är två udda tal. Det betyder att

$$a + b = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$$

och eftersom $k_1 + k_2$ är jämnt (summan av två udda tal är jämn) har vi tydligen $4|a + b$. Men om $a + b = 4 \cdot k$ så har vi

$$\gcd(a + b, 4) = \gcd(4k, 4) = 4 \cdot \gcd(k, 1) = 4 \cdot 1 = 4.$$

5. Relationer. För binära relationer har vi studerat egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet i kursen. Vi inför nu en femte egenskap hos binära relationer, vi kallar en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd A för *Euklidisk* om

$$\forall x, y, z \in A : x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \Rightarrow y\mathcal{R}z.$$

Visa att en euklidisk relation som är reflexiv också är en ekvivalensrelation.

Lösning: Låt $\mathcal{R}$ vara en godtycklig binär relation på en mängd A och antag att $\mathcal{R}$ är både reflexiv och euklidisk. Vi ska visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivlensrelation, det vill säga vi ska visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Reflexiviteten är klar så vi visar till att börja med symmetrin och låter därför x, y vara två godtyckliga element i A med $x\mathcal{R}y$. Eftersom $\mathcal{R}$ är reflexiv gäller även $x\mathcal{R}x$. Vi har alltså $x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}x$ och eftersom $\mathcal{R}$ är euklidisk drar vi slutsatsen $y\mathcal{R}x$. Detta visar alltså att $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ det vill säga relationen är symmetrisk. För att visa transitiviteten antar vi att x, y, z är tre godtyckliga element i A som uppfyller $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$. Eftersom vi just visat att relationen är symmetrisk kan vi dra slutsatsen $y\mathcal{R}x \wedge y\mathcal{R}z$, men detta ger precis att $x\mathcal{R}z$ tack vare att $\mathcal{R}$ är euklidisk. Vi har alltså visat $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för godtyckliga x, y, z vilket precis är transitivitet. Sammantaget har alltså relationen $\mathcal{R}$ alla egenskaper för att vara en ekvivalensrelation vilket skulle visas.

6. Fördjupad talteori. Visa, med matematisk induktion, utan kongruensräkning, att talet $n^3 + 2n$ alltid är delbart med 3 för alla positiva heltal n.

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow 3|n^3 + 2n$. Vi ska visa att $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : A(n)$. ($\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.)

Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ är sann.

$$A(1) \Leftrightarrow 3|1^3 + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow 3|1 + 2 = 3$$

och eftersom 3 delar sig själv så gäller tydligen $A(1)$.

Steg 2. Nu ska vi visa att $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ för alla positiva heltal p. Eftersom vi ska visa en implikation som antar vi att förledet är sant, det vill säga vi antar att för det godtyckliga heltalet p gäller

$$A(p) \Leftrightarrow 3|p^3 + 2p \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : p^3 + 2p = 3k.$$

Vi vet inte vilket heltalet k är, men vi vet att det finns. Med stöd av detta ska vi nu visa att $A(p+1)$ gäller, det vill säga vi ska visa att

$$A(p+1) \Leftrightarrow \exists k' : (p+1)^3 + 2(p+1) = 3k'.$$

Vi arbetar med vänster led och får

$$(p+1)^3 + 2(p+1) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + 2p + 2 = \left(p^3 + 2p\right) + \left(3p^2 + 3p + 3\right).$$

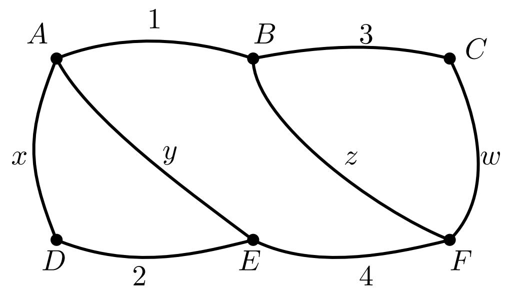
Nu använder vi induktionsantagandet och ersätter $\left(p^3 + 2p\right)$ med $3k$. Då vi tydligen

$$(p+1)^3 + 2(p+1) = 3k + 3\left(p^2 + p + 1\right) = 3 \cdot (k + p^2 + p + 1)$$

och tydligen ska k' väljas till $k + p^2 + p + 1$, då kommer $A(p+1)$ att gälla. Sammantaget har vi visat att för ett godtyckligt positivt heltal p gäller implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ vilket fullbordar steg 2.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående graf.



Som synes har grafen 6 hörn benämnda A, B, C, D, E, F och 8 kanter med vikter $1, 2, 3, 4, x, y, z, w$. Vi antar att x, y, z, w är positiva heltal.

(a) Ta fram en uppsättning vikter, x, y, z, w, som gör så att det finns fyra alternativa kortaste vägar från A till F och att dessa fyra kortaste vägar har den gemensamma kostnaden 10.

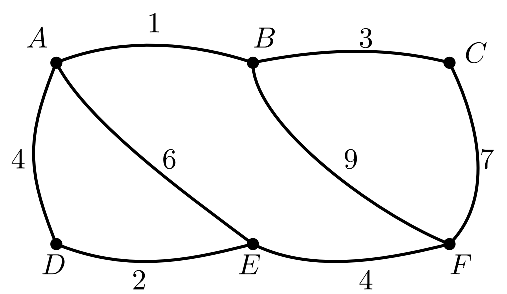
(b) För dessa värden på x, y, z, w, ange ett minsta uppspännande träd för grafen och ange dess vikt. (Du behöver inte redovisa i detalj hur du finner detta minsta uppspännande träd.)

Lösning: (a) En kortaste väg från A till F är förstås fri från cykler. Eftersom det finns precis fyra vägar som är fria från cykler med start i A och slut i F så måte x, y, z, w anpassas så att dessa fyra vägar alla få kostnaden 10. Vägarna är

$ABCF$ med kostnad 1+3+w
ABF med kostnad 1+z
AEF med kostnad y+4
$ADEF$ med kostnad x+2+4

Alla ska ha kostnad 10 så vi får ekvationerna $1 + 3 + w = 1 + z = y + 4 = x + 2 + 4 = 10$ som har lösningen $x = 4, y = 6, z = 9, w = 7$.

(b) Vi ska alltså finna ett minsta uppspännade träd i följande graf:



Om vi successivt adderar kanter till trädet som ska bli ett minsta uppspännande träd finner vi att först kan kanterna med vikter $1, 2, 3, 4$ adderas utan att skapa en cykel. Till sist adderas den sista kanten vikten 4 adderas och det ger ett minsta uppspännande träd. Så det minsta uppspännande trädet är

$$\{AB, BC, DE, EF, AD\}$$

och det har vikten 14.

8. Kombinatorik. Vi har ett kvadratiskt rutnät av $4 \times 4 = 16$ rutor. Säg att vi börjar i nedre hörnet till vänster och vill röra oss upp till övre högra hörnet, genom en sekvens av förflyttningar till angränsande ruta där vi **bara är tillåtna att ta ett steg upp eller ett steg till höger**. En sådan sekvens skulle kunna visualiseras på följande sätt.

			X
		X	X
		X	
X	X	X	

a) Beräkna antalet olika sekvenser som tar oss enligt ovanstående regler från nedre vänstra rutan till övre högra rutan

b) Generalisera ditt resultat och bestäm antalet olika sekvenser i ett rutnät av storlek $n \times m$, där n och m är heltal.

Ledning: Betrakta sekvensen av förflyttningar som följd av bokstäver: $UUHHUH$... där U betyder förflyttning upp och H förflyttning till höger.

Lösning: (4) Alla förflyttningar som tar oss från nedre vänstra hörnet till övre högra kan symboliseras som 6 symboler i följd där symbolerna består av 3 H och 3 U. Antal sådana förflyttningar måste alltså vara

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Vi får $\binom{6}{3}$ sådana vägar eftersom en väg kan defineras genom att välja ut de 3 platser av 6 möjliga där ett U ska placeras.

(b) I det allmänna fallet med ett rutnät som har m rader och n kolumner blir motsvarande uttryck

$$\binom{n-1+m-1}{n-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$$

soom svarar mot att vi ska välja ut $n-1$ platser av totalt $m-1+n-1$ där symbolen H ska sättas ut. På de övriga $m-1$ platserna sätts symbolen U ut. En sådan följd av symboler representerar entydigt en förflyttning av det slag som anges: $n-1$ förflyttningar åt höger och $m-1$ förflyttningar uppåt.

9. Sannolikhetslära. Låt A, B, C vara tre händelser som uppfyller följande:

1. $P(A) = P(B) = P(C) = 0.4$.
2. A, B är oberoende.
3. $P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0.18$.
4. $P(A \cap B \cap C) = 0.08$.

Beräkna $P(A \cup B \cup C)$. Även fast miniräknare inte är tillåten så går det utmärkt att räkna fram ett resultat så det krävs att du svarar med ett tal.

Lösning: Enligt satsen för inklusion och exklusion för sannolikheter har vi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Eftersom A, B är oberoende gäller $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$. Vi har då alla värden som behövs för att räkna ut $P(A \cup B \cup C)$. Vi får

$$P(A \cup B \cup C) = 0.4 + 0.4 + 0.4 - 0.16 - 0.18 - 0.18 + 0.08 = 0.76.$$