Kontrollskrivning 4 – HT2020 – Lösningar

Uppgift 1. ***Logik.*** Betrakta nedanstående härledning. Den är antingen korrekt eller felaktig.

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\neg r \vee p$
4. $q \vee r$

$\therefore$ p

Om den är korrekt, visa hur slutsatsen följer av premisserna antingen med hjälp av en sanningstabell eller genom att ange i detalj hur slutsatsen kan dras genom att att gå igenom steg för steg (med angivande av alla använda slutledningsregler) utgående från premisserna. Om den inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

Lösning: Slutledningen är giltig vilket framgår av följande detaljerade framställning av de respektive tillämpningar av aktuella härledningregler:

5. $\neg p$ Antagande för indirekt härledning
6. $\neg r$ 5,3,Disjunktiv Syllogism. (och 5)
7. q 4,6,Disjunktiv Syllogism (och 5)
8. r 7,2,Modus Ponens (och 5)
9. $\perp$ 6,8 (och 5).
10. p 5-9 och indirekt härledning

Uppgift 2a. ***Mängdlära – alternativ 1.*** Låt A, B, C beteckna tre mängder. Visa att utsagorna $A \cap B \subset C^c$, $B \cap C \subset A^c$ och $A \cap C \subset B^c$ i själva verket är ekvivalenta. Du får inte använda Venndiagram för detta bevis.

Lösning: Vi studerar först utsagan $A \cap B \subset C^c$ kan då skriva

$$A \cap B \subset C^c \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \cap B \to x \in C^c) \Leftrightarrow \forall x : (\neg(x \in A \cap B) \vee x \in C^c) \Leftrightarrow$$

$$\forall x : (\neg(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C^c) \Leftrightarrow \forall x : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \vee x \in C^c) \Leftrightarrow \forall x : (x \in A^c \vee x \in B^c \vee x \in C^c)$$

och eftersom uttrycket $x \in A^c \vee x \in B^c \vee x \in C^c$ är helt symmetrisk i A, B, C så kan även de andra två utsagorna ($B \cap C \subset A^c$ och $A \cap C \subset B^c$) skrivas om till utsagan baserad på det symmetriska uttrycket i A, B, C på liknande sätt. De tre utsagorna är alltså ekvivalenta.

Uppgift 2b. ***Mängdlära – alternativ 2.*** Avgör om $(A \cup B) - C \subset B \wedge A \cap C \subset B \Rightarrow A \subset B$ är sant för alla mängder A, B, C eller inte. Om det är sant, bevisa det, utan att använda Venndiagram. Om det är falskt, ge exempel på tre mängder A, B, C då vi inte har $(A \cup B) - C \subset B \wedge A \cap C \subset B \Rightarrow A \subset B$.

Lösning: Påståendet är *sant* och vi kan visa det genom att arbeta med den första utsagan och konstatera att

$$(A \cup B) - C \subset B \Leftrightarrow (A \cup B) \cap C^c \subset B \Leftrightarrow (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) \subset B \Leftrightarrow A \cap C^c \subset B$$

och eftersom andra utsagan är $A \cap C \subset B$ och $A = (A \cap C) \cup (A \cap C^c)$ så ser vi att eftersom A kan skrivas som unionen av två mängder ($A \cap C$ och $A \cap C^c$) som *båda* är innehållna i B så måste även $A \subset B$.

Uppgift 3a. ***Funktioner – alternativ 1.*** Betrakta mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Ange alla funktioner $g : A \to A$ som uppfyller båda kraven:

1. $g(1) = 1$
2. $g \circ g = \iota_A$.

Ledning: Fundera på de olika fallen $g = \iota_A$ och $g \neq \iota_A$.

Lösning: Den första enklaste funktionen som uppfyller kraven 1 och 2 är den enklaste funktionen av allihop, nämligen $g = \iota_A$ själv:

$$g = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}.$$

Men om $g \neq \iota_A$ så finns ett element a med $g(a) = b \neq a$. Eftersom g fortfarande ska vara sin egen invers måste detta innebära att $g(a) = b$ och $g(b) = a$. Funktionerna som uppfyller båda kraven ovan måste alltså ha formen

$$g = \{(1,1), (a,b), (b,a), (x,y)\}$$

Till exempel kan $a = 2$ och $b = 3$. Fortfarande, eftersom g är sin egen invers, måste $g(x) = y$ innebära att $g(y) = x$, men detta innebär också att $x = y$ eftersom $|A| = 4$, vi kan inte ha fyra olika element $1, a, b, x$ där x avbildas på något annat än sig själv eftersom vi bara har fyra element i A. Alltså måste g ha ett element till, förutom 1, som uppfyller $g(x) = x$, och dessa g måste också ha $g(a) = b \wedge g(b) = a$ för de övriga två elementen. Sammantaget finns det tre sådana funktioner:

$$g_1 = \{(1,1), (2,3), (3,2), (4,4)\} \quad g_2 = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,2)\} \quad g_3 = \{(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)\}.$$

Svar: De funktioner som fungerar är ι_A, g_1, g_2 och g_3.

Uppgift 3b. ***Funktioner – alternativ 2.*** Bevisa att den enda inverterbara funktionen $f : A \to A$ som uppfyller $f \circ f = f$ är $f = \iota$.

Lösning: Vi har $\iota \circ \iota = \iota$ så ι uppfyller tydligen $f \circ f = f$. Å andra sidan om f är en inverterbar funktion med $f \circ f = f$ så kan vi operera med f^{-1} från vänster så att vi får

$$f \circ f = f \Rightarrow f^{-1} \circ f \circ f = f^{-1} \circ f \Rightarrow \iota \circ f = \iota \Leftrightarrow f = \iota$$

vilket var vad som skulle visas.

Uppgift 4. ***Inledande talteori.*** Om talet n är udda, bevisa att $24|n^3 - n$.

Lösning: Om n är ett godtyckligt udda tal så finns ett heltal k så att $n = 2k + 1$. Det betyder att

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1) = 2kn(2k+2) = 4k(k+1)n.$$

Eftersom $k(k+1)$ alltid är delbart med 2 (antingen k eller $k+1$ är jämnt) så blir talet $n^3 - n = 4k(k+1)n$ delbart med 8. Vi såg också att $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ och det är är en produkt av tre på varandra följande tal. Något av dessa tal måste vara delbart med 3 så hela produkten $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ måste vara delbar med 3. Talet $n^3 - n$ är alltså delbart med både 8 och 3 och eftersom de är relativt prima har vi att även $8 \cdot 3 = 24$ delar $n^3 - n$.

Uppgift 5a. ***Relationer – alternativ 1.*** Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y^2 + 3 \pmod 4.$$

Visa att denna relation inte är reflexiv, inte är symmetrisk, inte är antisymmetrisk och inte heller transitiv.

Lösning: Välj $x = 1$ och $y = 1$. Då har vi $y^2 + 3 = 4 \equiv 0 (\text{mod } 4)$ så att

$$x = 1 \not\equiv 0 = 4 = y^2 + 3 \pmod 4$$

så att det *inte* gäller att $1\mathcal{R}1$, det vill säga $\mathcal{R}$ är inte reflexiv (reflexiviteten kräver ju att $x\mathcal{R}x$ för *alla* x). Vidare, om vi sätter $x = 1$ och $y = 4$ så har vi $y^2 + 3 = 16 + 3 = 17$ men $17 \equiv 3 \not\equiv 1 (\text{mod } 4)$. Samtidigt gäller att om vi sätter $x = 4$ och $y = 1$ så ser vi att $y^2 + 3 = 4 \equiv x$. Sammantaget har vi $4\mathcal{R}$ men inte $1\mathcal{R}4$ så $\mathcal{R}$ är inte symmetrisk. Slutligen konstaterar vi att med $x = 3$ och $y = 4$ så har vi $y^2 + 3 = 16 + 3 \equiv 3 = x$ (mod 4) så att $3\mathcal{R}4$, vidare med $x = 4$ och $y = 3$ ser vi att $y^2 + 3 = 12 \equiv 4 = x (\text{mod } 4)$ så att $3\mathcal{R}4$ och $4\mathcal{R}3$ och eftersom $3 \neq 4$ är inte $\mathcal{R}$ antisymmetrisk. Slutligen konstaterar vi att om $x = 3$ och $y = 3$ så har vi $y^2 + 3 = 12 \equiv 0 \not\equiv 3 = x (\text{mod } 4)$ vilket visar att

$$3\mathcal{R}4 \qquad \text{och} \qquad 4\mathcal{R}3$$

men trots detta gäller inte $3\mathcal{R}3$ vilket visar att relationen inte heller är transitiv.

Uppgift 5b. *Relationer – alternativ 2*. Betrakta U som är mängden av alla vektorer med två komponenter, alltså

$$U = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definiera relationen $\mathcal{R}$ på U genom $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow (u + v) \cdot (u - v) = 0$ där $\cdot$ betecknar skalärprodukten på U, det vill säga om $u_1 = (x_1, y_1)$ och $u_2 = (x_2, y_2)$ så är $u_1 \cdot u_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ (den vanliga skalärprodukten alltså). Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Lösning: Vi kan skriva om definitionen av relationen så här:

$$u\mathcal{R}v \Leftrightarrow (u + v) \cdot (u - v) = 0 \Leftrightarrow u \cdot u - u \cdot v + v \cdot u - v \cdot v = 0 \Leftrightarrow |u|^2 - |v|^2 = 0 \Leftrightarrow |u| = |v|$$

det vill säga vektorerna u och v är relaterade under $\mathcal{R}$ om och endast om de har precis samma längd.

Relationen är då *reflexiv* eftersom en vektor u alltid har samma längd som sig själv, den är också symmetrisk eftersom om u har samma längd som v så har v samma längd som u. Vidare är relationen också transitiv eftersom om u har samma längd som v (kalla längden l) och om v i sin tur har samma längd som w så har förstås också w längden l, det vill säga samma längd som u, det vill säga u är relaterad till w.

Uppgift 6. *Fördjupad talteori*. Använd matematisk induktion för att bevisa summaformeln

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ och vi ska visa $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$. Inför också beteckningarna $VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ respektive $HL_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Vi har då $A(n) \Leftrightarrow VL_n = HL_n$. Vi tar nu de tre stegen i ett induktionsbevis.

Steg 1. Visa att $A(1)$ är sann, det vill säga visa att $VL_1 = HL_1$. Vi studerar dessa var för sig:

$$VL_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}. \qquad HL_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - 3/2 = \frac{1}{2}.$$

Eftersom tydligen $VL_1 = \frac{1}{2} = HL_1$ så måste $A(1)$ vara sann vilket fullbordar första steget.

Steg 2. Vi ska nu visa implikationen $A(p) \Rightarrow A(p + 1)$ för alla positiva heltal p och vi antar därför att $A(p)$ är sant för ett visst p. Då har vi alltså $A(p) \Leftrightarrow VL_p = HL_p \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{p+2}{2^p}.$$

Med kraft av detta ska vi visa att även $A(p + 1)$ dvs $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ gäller så vi studerar VL_{p+1} :

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} + \frac{p+1}{2^{p+1}}.$$

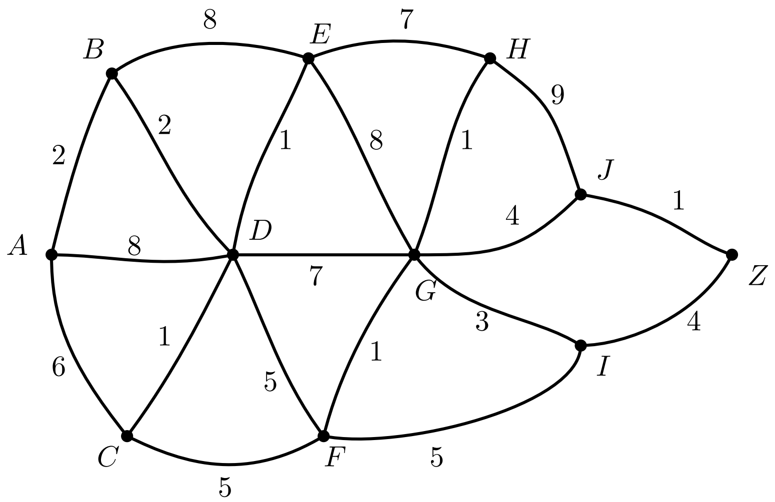
Men nu vet vi att $VL_p = VL_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{p+2}{2^p}$ enligt induktionsantagandet så vi sätter in det och får

$$VL_{p+1} = 2 - \frac{p+2}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+2}{2^p} \cdot \frac{2}{2} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{2p+4}{2^{p+1}} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}$$

och eftersom $HL_{p+1} = 2 - \frac{(p+1)+2}{2^{p+1}}$ är precis lika med $2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}$ har vi att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Alltså har vi med stöd av induktionsantagandet $VL_p = HL_p$ visat att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$, det vill säga vi har visat implikationen $A(p) \Rightarrow A(p + 1)$. Eftersom p var ett godtyckligt positivt heltal är andra steget klart.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 samt induktionsaxiomet fullbordar beviset.

Uppgift 7. ***Grafteori.*** Finn ett minsta uppspännande träd för följande graf och ange dess vikt.



Lösning: Vi adderar kanter tills vi få ett minsta uppspännande träd och börjar därför med att addera alla kanter med vikt 1. Vi kan addera allihop eftersom det inte ger upphov till några cykler, vi har då kantmängden

$$\{CD, DE, FG, GH, JZ\}.$$

Detta är ännu inte ett uppspännande träd varför vi adderar kanter med vikt 2, det finns två sådana kanter – AB och BD – (och om vi adderar dem till ovanstående kantmängd så uppstår ingen cykel). Detta resulterar i kantmängden $\{AB, BD, CD, DE, FG, GH, JZ\}$. Inte alla hörn är med ännu så vi går vidare till nästa nivå som är kanter med vikt 3, det finns bara en sådan – GI – som efter addition inte ger upphov till någon cykel. Vi har således kantmängden

$$\{AB, BD, CD, DE, FG, GH, JZ, GI\}.$$

Denna kantmängd innehåller alla hörn, men består bara av 8 kanter, eftersom grafen har 11 hörn så måste ett minsta uppspännande träd ha $11 - 1 = 10$ kanter, vi ska alltså addera två kanter till på ett sätt som inte ger upphov till cykler, de kanter vi kan överväga har vikten minst 4 och så liten som möjligt, två lika goda alternativ finns: JG och IZ. Vi väljer JG och kantmängden som ska bli det minsta uppspännande trädet är nu $\{AB, BD, CD, DE, FG, GH, JZ, JG, GI\}$. Slutligen ska vi addera en kant till med vikten 5 och här finns återigen två lika goda alternativ: CF och DF. Vi väljer CF och får till slut ett minsta uppspännande träd givet av kantmängden

$$\{AB, BD, CD, DE, FG, GH, JZ, JG, GI, CF\}$$

och summan av alla vikter blir $2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 3 + 5 = 21$.

Uppgift 8. ***Kombinatorik.*** I en projektgrupp finns 5 studenter som ska arbeta med två problem, vi kallar dem A och B. På grund av problemens natur vill projektledaren att flera studenter löser samma problem men presenterar oberoende lösningar. Det är ok att en student tar sig an båda problemen. Om vi säger att en arbetsfördelning består i att vi bestämmer vilka studenter som ska arbeta med vilket (eller vilka) problem, hur många arbetsfördelningar finns det då om vi vill att precis 4 studenter ska arbeta med problem A och precis 3 ska arbeta med problem B? (Det är faktiskt också ok att en student inte arbetar med något problem alls – kanske den studenten arbetat med två problem i ett tidigare projekt.)

Lösning: Vi betraktar situationen så här: en konstellation med studenter som arbetar med olika antal problem kan beskrivas av att vi bland de fem studenterna väljer ut den enda som inte ska arbeta med problem A, detta kan göras på 5 sätt. Därefter väljer vi ut de två studenter som inte ska arbeta med problem B. Detta kan göras på $\binom{5}{2} = 10$ sätt. Totalt antal sätt att skapa konstellationer av studenter blir alltså, enligt multiplikationsprincipen lika med

$$5 \cdot 10 = 50.$$

Uppgift 9. ***Sannolikhetslära.*** Tre sexsidiga tärningar kastas. Beräkna sannolikheten att utfallet blir

(a) Samma poängtal på alla tärningar.
(b) Samma poängtal på precis två tärningar.
(c) Olika poängtal på alla tärningar.

Lösning: *(a)* Totalt antal sätt att kasta tre tärningar är

$$n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3.$$

Av dessa sätt är det $m = 6$ olika sätt att få samma poängtal på alla tärningar, svaret på *(a)* är därför

$$\frac{m}{n} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

(b) Antalet n är beräknat med ordningen medräknad. För att beräkna m för *(b)*-uppgiften måste därför också ordningen räknas med. Antalet sätt att få samma poängtal på precis två tärningar kan då ses som en valprocess i 3 steg:

Steg 1. Välj vilken tärning som ska skilja sig från de övriga två: kan ske på 3 sätt.
Steg 2. Välj vilket poängtal som den ensamma tärningen ska ha: kan ske på 6 sätt.
Steg 3. Väljs vilket poängtal som de två andra tärningarna ska ha: kan ske på 5 sätt.

Totalt antal sätt (m-talet) i *(b)* blir därför $m = 3 \cdot 6 \cdot 5 =$ och den sökta sannolikheten i *(b)* blir då;

$$\frac{m}{n} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{6^3} = \frac{5}{12}.$$

Det sökta svaret i *(c)* kan beräknas med hjälp av resultaten i *(a)* och *(b)*, vi får då $m = 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 5 - 6 = 6 \cdot (36 - 15 - 1) = 6 \cdot 20 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ och den sökta sannolikheten blir då

$$\frac{m}{n} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{6^3} = \frac{5}{9}.$$