Tentamen CM1000, april 2021

Del I

1. Logik. Låt p, q, r representera godtyckliga utsagor och betrakta nedanstående tre generella utsagor. Var och en av dem är antingen sann för alla p, q, r eller inte. För de utsagor som är sanna för alla tilldelningar av sanningsvärden på p, q, r, bevisa dem (på valfritt sätt) och för alla utsagor som är falska, finn en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som visar att de inte är sanna.

1. $\neg p \to \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q)$
2. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$
3. $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p) \Leftrightarrow \neg((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r))$

Lösning: 1:an är sann ty: $\neg p \to \neg q \Leftrightarrow q \to p \Leftrightarrow \neg q \vee p \Leftrightarrow \neg(q \wedge \neg p)$. 2:an är falsk ty om $p = falsk$ och $r = sann$ så blir $p \wedge (q \vee r)$ falsk och $(p \wedge q) \vee r$ sann då kan de alltså inte vara logiskt ekvivalenta (värdet på q spelar här ingen roll). 3:an är sann och det kan vi se genom att inse att vänster led innebär att alla utsagor är ekvivalenta, dvs alla har samma sanningsvärde, alla tre är antingen sanna eller falska. Höger led uttrycker också detta, konjunktionen innanför negationen uttrycker att någon av p, q, r ska vara sann och någon ska vara falsk, den är alltså falsk precis då alla p, q, r har samma sanningsvärde, negationen gör då att detta då överenstämmer med vänsterledet.

2. Mängdlära. Visa att två mängder A, B är disjunkta precis då unionen av A och B är lika med den symmetriska differensen av A och B. Venndiagram får *inte* användas. (Symmetrisk differens mellan A och B är $(A - B) \cup (B - A)$.)

Lösning: Vi ska visa att $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$. Antag att $A \cap B = \emptyset$. Då gäller $A = A - B$ och $B = B - A$ så att $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$. Antag omvänt att $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$ och antag också för att finna en motsägelse att $A \cap B \neq \emptyset$. Vi kan kalla elementet i $A \cap B$ för x. Då gäller självklart att $x \in A \cup B$. Men $x \in B \Rightarrow x \notin A - B$ och eftersom vi också har $x \in A \Rightarrow x \notin B - A$ så gäller tydligen $x \notin (A - B) \cup (B - A)$. Men detta motsäger att $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$ eftersom $x \in A \cup B$. Antagandet om att det finns ett x med $x \in A \cap B$ måste alltså vara felaktigt, vilket visar att $A \cap B = \emptyset$ vilket fullbordar beviset.

3. Funktioner. Låt funktionerna f, g vara givna som reellvärda funktioner definierade i hela $\mathbb{R}$ genom

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = ax + b$$

där a, b är konstanta reella tal. Ange alla möjliga val av a, b som gör att $f \circ g = g \circ f$. (*Ledning: det finns tre sådana val.*)

Lösning: Vi ska finna alla val av konstanterna a, b som gör så att

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Både vänster och höger led i denna likhet är polynom och om vi sätter in definitionerna av f, g och utvecklar får vi polynomekvationen

$$(ax + b)^2 - 1 = a(x^2 - 1) + b \Leftrightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 - 1 = ax^2 - a + b.$$

Två polynom är lika precis då koefficienterna är lika så vi få ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 = a \\ 2ab = 0 \\ b^2 - 1 = b - a \end{cases}.$$

Ekvationen $a^2 = a$ har lösningarna $a = 0$ respektive $a = 1$ så vi får de två fallen

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2 \cdot 0 \cdot b = 0 \\ b^2 - 1 = b - 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ 2 \cdot 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ b^2 - 1 = b - 1 \end{cases}.$$

Och eftersom $b = 0$ fungerar i den sista ekvationen i det andra fallet så blir ett alternativ att $a = 1$ och $b = 0$. Det första fallet ger oss $a = 0$ (som gör så att andra ekvationen automatiskt blir uppfylld) och tredje ekvationen blir en andragradekvation i b som har lösningarna

$$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{respektive} \qquad b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Sammantaget är de tre möjliga valen på a, b

$$a = 1, b = 0 \qquad a = 0, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad a = 0, b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

4. Inledande talteori. Betrakta funktionen $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ given av $g(n, m) = 2n + 3m$. Visa att funktionen är surjektiv men inte injektiv.

Lösning: Låt y vara ett godtyckligt heltal. Eftersom 2 och 3 är relativt prima finns enligt Bezouts sats m, n sådana att

$$2n + 3m = 1.$$

Detta innebär att $g(ny, my) = y$ som visar surjektiviteten eftersom y var godtyckligt. För att visa att funktionen inte är injektiv kan vi observera att

$$g(2, -1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 1 \qquad \text{och} \qquad g(-1, 1) = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1$$

så $(2, -1) \neq (-1, 1)$ men ändå har vi $g(2, -1) = g(-1, 1)$. Alltså är inte g injektiv.

5. Relationer. Låt S vara mängden av alla räta linjer i planet och låt $\mathcal{R}$ vara en relation på S där $l_1 \mathcal{R} l_2$ om och endast om linjerna l_1, l_2 är ortogonala (alltså att skalärprodukten mellan linjernas riktningsvektorer är 0). Vilka av egenskaperna *reflexivitet*, *transitivitet*, *symmetri* och *antisymmetri* har denna relation? Bevisa dina påståenden genom att basera ditt resonemang på linjernas riktningsvektorer.

Lösning: Vi låter genomgående v_1, v_2, v_3 beteckna riktningsvektorer för linjerna l_1, l_2, l_3 som kommer att väljas olika beroende på vad som ska bevisas.

Relationen är inte reflexiv eftersom vi för varje linje l_1 har att den inte är ortogonal mot sig själv, då hade vi haft $v_1 \cdot v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$ vilket inte går eftersom en riktningsvektor inte kan vara nollvektorn. Relationen är symmetrisk, ty $l_1 R l_2 \Leftrightarrow v_1 \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 \cdot v_1 = 0 \Leftrightarrow l_2 R l_1$. Relationen är inte antisymmetrisk, ty välj till exempel de två olika linjerna $l_1 : y = x$ och $l_2 : y = -x$. De har riktningsvektorerna $v_1 = (1, 1)$ respektive $v_2 = (1, -1)$ som är ortogonala, dvs vi har $l_1 R l_2$. Av symmetri följer då också $l_2 R l_1$. Men trots att vi har $l_1 R l_2$ och $l_2 R l_1$ gäller inte $l_1 = l_2$, detta motsäger anti-symmetri. Relationen är inte heller transitiv, detta kan ses genom att återigen välja l_1 och l_2 som i beviset för att relationen inte är anti-symmetrisk, nu sätter vi också $l_3 = l_1$ så att vi har $l_1 R l_2$ och $l_2 R l_3$. Om relationen vore transitiv skulle vi haft $l_1 R l_3$ men eftersom $l_3 = l_1$ och vi sett att vi inte har $l_1 R l_1$ motbevisar detta även transitiviteten.

6. Fördjupad talteori. Talet 171 är delbart med 3, eftersom $171 = 3 \cdot 57$. Observera att summan av siffrorna i talet är $1 + 7 + 1 = 9$, också delbar med 3. Ett annat exempel är talet $20163 = 3 \cdot 6721$, där summan av siffrorna i talet är $2 + 0 + 1 + 6 + 3 = 12$, igen delbar med 3. Det visar sig faktiskt att ett tal n är delbart med 3 om och endast om summan av siffrorna i n är delbar med 3. Bevisa detta påstående för positiva heltal (> 0) genom räkning med restklasser modulo 3! Observera att det är en ekvivalens du ska visa, alltså att om σ_n betecknar siffersumman i talet n (som är positivt) så ska du visa

$$\sigma_n \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 3.$$

Lösning: Låt $n > 0$ vara ett godtyckligt heltal med k siffror. Då gäller

$$n = d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + d_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots + d_1 \cdot 10 + d_0 \qquad \text{och} \qquad \sigma_n = d_{k-1} + d_{k-2} + \ldots + d_1 + d_0.$$

Här betecknar vi alltså talet ns siffror med $d_0, d_1, \ldots, d_{k-2}, d_{k-1}$ som är k stycken tal i intervallet $0, 1, 2 \ldots, 9$. (Men d_{k-1} kan inte vara 0.)

Eftersom vi kan skriva $10 = 9 + 1 = 3 \cdot 3 + 1$, $100 = 99 + 1 = 3 \cdot 33 + 1$, ..., $10^{k-2} = 99..9 + 1 = 3 \cdot 33..3 + 1$, $10^{k-1} = 99..9 + 1 = 3 \cdot 33..3 + 1$ så har vi

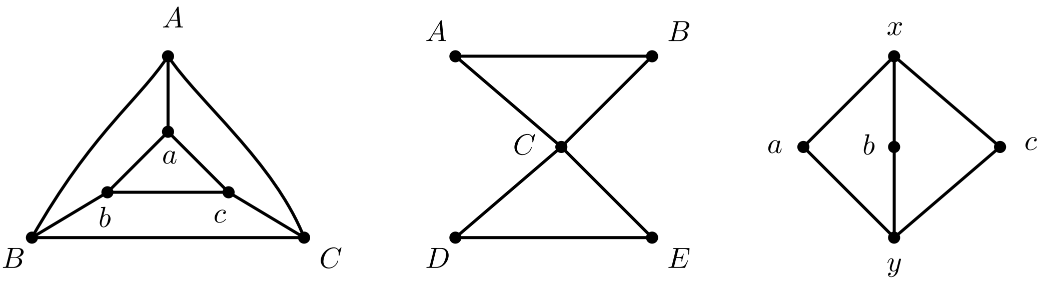
$$n \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + d_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots + d_1 \cdot 10 + d_0 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow$$

$$d_{k-1} \cdot (3 \cdot 33..3 + 1) + d_{k-2} \cdot (3 \cdot 33..3 + 1) + \ldots + d_1 \cdot (3 \cdot 3 + 1) + d_0 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow$$

$$d_{k-1} \cdot (1) + d_{k-2} \cdot (1) + \ldots + d_1 \cdot (1) + d_0 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow d_{k-1} + d_{k-2} + \ldots + d_1 + d_0 \equiv 0 \pmod 3$$

där den sista likheten är precis $\sigma_n \equiv 0 \pmod 3$ vilket fullbordar beviset.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående tre grafer:



För varje graf, ange om grafen har en hamiltoncykel eller inte. Om grafen har en hamiltoncykel, ange den genom att räkna upp ordningen på hörnen i hamiltoncykeln. Om grafen inte har en hamiltoncykel, presentera ett argument som motiverar att ingen hamiltoncykel finns. Använd de beteckningar på hörnen som är angivna i presentationen av graferna ovan.

Lösning: I grafen till vänster finns en hamiltoncykel: $AabcCBA$. I den mittersta grafen finns ingen hamiltoncykel och problemet är hörnet betecknat med C, om det funnes en hamiltoncykel så kan vi anta att den börjar och slutar i C. Men de enda möjliga cykler som börjar och slutar i C (som alltså inte upprepar några hörn – utom starthörnet som är lika med sluthörnet) är $CABC$, $CBAC$, $CDEC$ och $CEDC$. Inga av dessa är hamiltoncykler eftersom de inte innehåller grafens samtliga hörn. Slutligen kan inte heller sista grafen innehålla en hamiltoncykel, av följande anledning. Vi antar att en hamiltoncykel finns och den måste då innehålla hörnet x. Sedan måste någon cykeln innehålla någon av följderna xay, xby eller xcy. I samtliga dessa fall finns två vägar tillbaka till x, till exempel om hamiltoncykeln hade börjat med xay och fortsatt med b så skulle nästa hörn bara kunna vara x och då har vi glömt c. På liknande sätt hade hamiltoncykeln inte heller kunna börja med $xayc$. Detta betyder att ingen hamiltoncykel kan börja med xay. Liknande resonemang utesluter också hamiltoncykler som börjar med xby och xcy (observera symmetrin i dessa resonemang och hur denna symmetri avspeglas i grafens utseende). Eftersom inga hamiltoncykler kan utgå från x och x ju måste vara med i en hamiltoncykel drar vi slutsatsen att grafen inte har några hamiltoncykler.

8. Kombinatorik. Hos en bilförsäljare finns 12 bilar med tre olika egenskaper: gamla bilar, röda bilar och elbilar. Av någon anledning (som kanske har med tentamenskonstruktion att göra) tycker bilförsäljaren väldigt mycket om just röda bilar. En bil kan inte vara både elbil och gammal. 5 av bilarna är gamla, 5 är röda och 5 är elbilar. Det finns bara en röd elbil. Hur många gamla röda bilar finns det hos bilförsäljaren?

Lösning: Vi inför tre mängder:

$G =$ gamla bilar
$R =$ röda bilar
$E =$ elbilar

I uppgiften söks $|G \cap R|$. Principen för inklusion och exklusion för tre mängder lyder

$$|G \cup R \cup E| = |G| + |R| + |E| - |G \cap E| - |G \cap R| - |E \cap R| + |G \cap R \cap E|.$$

Upplysningarna i texten ger $|G \cup R \cup E| = 12$, $|G| = |R| = |E| = 5$, $|E \cap R| = 1$, $|G \cap E| = |G \cap R \cap E| = 0$. Detta insatt i ekvationen ger oss

$$12 = 5 + 5 + 5 - 0 - |G \cap R| - 1 + 0 \Leftrightarrow |G \cap R| = 2.$$

Svar: det finns 2 bilar som är gamla och röda.

9. Sannolikhetslära. Två urnor U_1 och U_2 innehåller vardera tre kulor. U_1 innehåller två vita och en svart medan U_2 innehåller två svarta och en vit. En slumpvis vald kula flyttas från U_2 till U_1. Kulorna i U_1 blandas och därefter dras en slumpvis vald kula från U_1. Vad är sannolikheten att den dragna kulan är vit?

Lösning: Det finns två slumpprocesser inblandade först flyttandet av en kula från U_2 till U_1 och därefter dragandet av en kula från U_1. För att beskriva det hela inför vi följande händelser:

1. $A =$ den flyttade kulan är svart. Vi har $P(A) = 2/3$.
2. $B =$ den flyttade kulan är vit. Vi har $P(B) = 1 - P(A) = 1/3$.
3. $V =$ den dragna kulan är vit.

Vi söker $P(V)$ och enligt satsen om total sannolikhet gäller

$$P(V) = P(V|A) \cdot P(A) + P(V|B) \cdot P(B).$$

Det återstår alltså att finna $P(V|A)$ respektive $P(V|B)$. För att finna $P(V|A)$ kan vi resonera så här: om A inträffat så innebär det att U_1 innehåller två vita och två svarta kulor. Det är alltså precis 50% att det blir en vit kula som dras. Alltså drar vi slutsatsen att $P(V|A) = 1/2$. Vi resonerar på samma sätt för beräkning av $P(V|B)$, här har en vit kula flyttats så att U_1 vid dragningen innehåller tre vita och en svart, sannolikheten för att en vit kula då dras är 75%, vi drar alltså slutsatsen att $P(V|B) = 3/4$. Alla sannolikheter insatta i formeln ger oss då:

$$P(V) = P(V|A) \cdot P(A) + P(V|B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Del II

10. För betyget C. *Kan också täcka delområde 5, Relationer.*

I datoralgebrasystem används en abstrakt algebraisk teori för så kallade *Gröbnerbaser*. I teorin har man behov av användning av speciella typer av relationer på *monom*. Ett *monom* i två variabler x, y är ett uttryck på formen $x^n y^m$, där n och m är heltal ≥ 0.

Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på mängden av monom i två variabler given av

$$x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_2} y^{m_2} \iff n_1 < n_2 \text{ eller } (n_1 = n_2 \text{ och } m_1 \leq m_2).$$

Visa att denna relation är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Lösning: Detta kallas för en *Dictionary Order*, att först sortera med avseende på en storhet (n) och i andra hand sortera med avseende på en annan storhet (m). Vi ska visa reflexivitet, anti-symmetri och transitivitet. *Reflexivitet:* låt $x^n y^m$ vara ett godtyckligt monom. Då har vi $x^n y^m \mathcal{R} x^n y^m$ eftersom $n_1 = n = n = n_2$ samt $m_1 = m \leq m = m_2$ så att villkoret $n_1 = n_2$ och $m_1 \leq m_2$ i definitionen av $\mathcal{R}$ är uppfyllt. *Antisymmetri:* för att visa antisymmetri ska vi visa att om $x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_2} y^{m_2}$ *och* $x^{n_2} y^{m_2} \mathcal{R} x^{n_1} y^{m_1}$ så måste $x^{n_1} y^{m_1} = x^{n_2} y^{m_2}$ vilket är samma sak som att $n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2$. Vi antar alltså att $x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_2} y^{m_2}$ *och* $x^{n_2} y^{m_2} \mathcal{R} x^{n_1} y^{m_1}$. Då har vi, enligt definitionen av relationen, följande:

$$n_1 < n_2 \text{ eller } (n_1 = n_2 \text{ och } m_1 \leq m_2) \quad \text{samt} \quad n_2 < n_1 \text{ eller } (n_2 = n_1 \text{ och } m_2 \leq m_1)$$

Om vi nu hade $n_1 \neq n_2$ så hade någon av relationerna ($n_1 = n_2$ och $m_1 \leq m_2$) och ($n_2 = n_1$ och $m_2 \leq m_1$) gällt, men båda dessa anger att $n_1 = n_2$, så vi måste alltså ha $n_1 = n_2$. Nu måste ju också båda relationerna ($n_1 = n_2$ och $m_1 \leq m_2$) och ($n_2 = n_1$ och $m_2 \leq m_1$) gälla, vilket kan förenklas till

$$m_1 \leq m_2 \qquad \text{och} \qquad m_2 \leq m_1$$

vilket ger $m_1 = m_2$ eftersom relationen $\leq$ är antisymmetrisk. Sammantaegt har vi visat att $n_1 = n_2$ och $m_1 = m_2$ vilket visar antisymmetrin.

För att visa transitiviteten ska vi visa

$$x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_2} y^{m_2} \qquad \text{och} \qquad x^{n_2} y^{m_2} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3} \qquad \Rightarrow \qquad x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3}$$

så vi antar alltså att $x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_2} y^{m_2}$ och $x^{n_2} y^{m_2} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3}$. Detta kan då skrivas som

$$n_1 < n_2 \text{ eller } (n_1 = n_2 \text{ och } m_1 \leq m_2)$$

och

$$n_2 < n_3 \text{ eller } (n_2 = n_3 \text{ och } m_2 \leq m_3).$$

Av detta ska följa

$$n_1 < n_3 \text{ eller } (n_1 = n_3 \text{ och } m_1 \leq m_3) \Leftrightarrow x^{n_1} y^{n_1} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3}$$

och vi kan se det genom att dela upp i fyra fall:

1. $n_1 = n_2, n_2 = n_3$
2. $n_1 = n_2, n_2 < n_3$
3. $n_1 < n_2, n_2 = n_3$
4. $n_1 < n_2, n_2 < n_3$

(Relationens konstruktion innebär att vi aldrig kan ha $n_1 < n_2$ eller $n_2 < n_3$.)

Fall 1. Här måste även $m_1 \leq m_2$ samt $m_2 \leq m_3$ gälla vilket av $\leq$-relationens transitivitet ger $m_1 \leq m_3$. Det innebär att $x^{n_1} y^{n_1} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3}$ gäller.

Fall 2. Om $n_1 = n_2 < n_3$ så följer förstås $n_1 < n_3$ vilket återigen innebär att $x^{n_1} y^{n_1} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3}$ gäller.

Fall 3 och 4 är exakta analoga med fall 2. (I alla dessa fall ser vi direkt att $n_1 < n_3$ vilket direkt ger $x^{n_1} y^{n_1} \mathcal{R} x^{n_3} y^{m_3}$.)

Del III

11. För betyget A. *Kan också täcka delområde 9, Sannolikhetslära*

I nyheterna rapporterades det för ett tag sedan om en så kallad *fas-3* studie av ett experimentellt vaccin mot COVID-19. I rapporten angavs att ett stort antal människor (43538) ingått i studien där hälften fick det experimentella vaccinet och hälften fick ett icke verksamt preparat (ett så kallat placebo). Totalt i hela populationen smittades 94 människor av COVID-19 varav de flesta var i den icke-vaccinerade gruppen. Företaget som gjorde studien hävdar att studien visar att vaccinet är minst 90% effektivt vilket vi för denna uppgifts del kan anta uttrycker sig som att sannolikheten att få COVID-19 om man är vaccinerad är max 10% av sannolikheten att få COVID-19 om man inte är vaccinerad. Sannolikheten att få COVID-19 ska alltså gå ner 90% tack vare vaccinering.

Beräkna, med dessa tolkningar, maximala antalet vaccinerade personer som kunde vara smittade av COVID-19 bland de som var vaccinerade för att vi ska kunna dra slutsatsen att vaccinet har en 90%-ig effektivitet.

Lösning: Vi studerar utfallsrummet med alla de drygt 40000 personerna som ingick i studien och inför följande händelser:

C = en person i populationen fick COVID-19.
V = en person i populationen är vaccinerad.

Satsen om total sannolikhet ger oss

$$P(C) = P(C|V) \cdot P(V) + P(C|V^c) \cdot P(V^c)$$

Beteckna antalet personer som ingår i den vaccinerade gruppen som fick COVID-19 med x och beteckna antalet personer som ingick i studien med N, ($N = 43538$). Då har vi

$P(C) = 94/N$.
$P(C|V) = \frac{x}{N/2}$
$P(C|V^c) = \frac{94-x}{N/2}$
$P(V) = P(V^c) = 0.5$

Om vi har en exakt effektivitet på 90% så gäller $P(C|V) = 0.1 \cdot P(C|V^c) \Leftrightarrow 10 \cdot P(C|V) = P(C|V^c)$ som insatt i ekvationen ovan ger oss

$$P(C) = P(C|V) \cdot P(V) + 10 \cdot P(C|V) \cdot P(V^c)$$

och med de aktuella värdena insatta ger detta ekvationen

$$\frac{94}{N} = \frac{x}{N/2} \cdot 0.5 + 10 \cdot \frac{x}{N/2} \cdot 0.5 \Leftrightarrow 94 = 11 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{94}{11}$$

som är ungefär 8.5. Antalet personer som fick COVID-19 som var vaccinerade måste alltså vara mindre än detta antal och det största antalet personer som uppfyller detta är 8. Alltså max 8 vaccinerade COVID-19-smittade och 86 icke-vaccinerade COVID-19-smittade.