Fx-skrivning 1 – Lösningar

1. Logik. Låt utsagorna p, q, u, v vara givna. Visa att

$$(\neg p \to u) \wedge (\neg q \to v) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (u \wedge q) \vee (p \wedge v) \vee (u \wedge v).$$

Lösning: Eftersom $a \to b \Leftrightarrow \neg a \vee b$ kan vi skriva

$$(\neg p \to u) \wedge (\neg q \to v) \Leftrightarrow (\neg\neg p \vee u) \wedge (\neg\neg q \vee v) \Leftrightarrow (p \vee u) \wedge (q \vee v)$$

och med distributiva lagen kan detta skrivas om till

$$((p \vee u) \wedge q) \vee ((p \vee u) \wedge v)$$

som genom ytterligare en omskrivning med hjälp av distributiva lagen kan skrivas om till

$$((p \wedge q) \vee (u \wedge q)) \vee ((p \wedge v) \vee (u \wedge v))$$

vilket efter borttagning av de överflödiga parenteserna blir precis det som krävs.

2. Mängdlära. Sätt $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ och avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Inga motiveringar behövs men du behöver ha *alla* rätt för att uppgiften ska vara godkänd. ($\subset$ står som vanligt för delmängdsrelationen.)

(a) $\emptyset \subset M$,
(b) $\{\emptyset\} \subset M$,
(c) $\{\{\emptyset\}\} \subset M$,
(d) $\emptyset \in M$,
(e) $\{\emptyset\} \in M$,
(f) $\{\{\emptyset\}\} \in M$.

Svar:

(a) Sann. (Sann för alla mängder, inte bara M.)
(b) Sann.
(c) Sann.
(d) Sann.
(e) Sann.
(f) Falsk.

3. Funktioner. Om $f : A \to B$ och $E \subset A$ så definieras $f(E)$ som mängden

$$f(E) = \{y \in B : (\exists x \in E : y = f(x))\}.$$

Om f är injektiv och $E, F \subset A$, visa att vi alltid har

$$f(E) \cap f(F) = f(E \cap F).$$

Lösning: Vi ska visa att två mängder är lika, det vill säga mängderna $S_1 = f(E) \cap f(F)$ och $S_2 = f(E \cap F)$. Vi visar denna mängdidentitet genom att visa mängdinklusionerna $S_1 \subset S_2$ och $S_2 \subset S_1$.

$S_2 = f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F) = S_1$: Tag $y \in F(E \cap F)$ godtyckligt. Vi ska visa att också $y \in f(E) \cap f(F) = S_1$. Eftersom f är injektiv så finns precis ett $x \in A$ med $f(x) = y$. Att $y \in f(E \cap F)$ innebär att detta x ligger i $E \cap F$, det vill säga $x \in E$ och $x \in F$. Men detta innebär i sin tur att $y = f(x) \in f(E)$ och $y = f(x) \in f(F)$ det vill säga $y \in f(E) \cap f(F)$ vilket visar $S_2 \subset S_1$.

$S_1 = f(E) \cap f(F) \subset f(E \cap F) = S_2$: Tag nu $y \in f(E) \cap f(F)$ godtyckligt. Vi ska nu visa att $y \in f(E \cap F)$. Att $y \in f(E) \cap f(F)$ innebär att $y \in f(E)$ och $y \in f(F)$, det finns alltså $x_1 \in E$ och $x_2 \in F$ sådana att $y = f(x_1) = f(x_2)$. Återigen eftersom f ä injektiv har vi $x_1 = x_2$ och vi kallar det gemensamma elementet för x. Då har vi allltså $x \in E$ och $x \in F$ det vill säga $x \in E \cap F$. Och eftersom $f(x) = y$ så har vi tydligen $y \in f(E \cap F)$ vilket visar den omvända inklusionen vilket fullbordar beviset.

4. Inledande talteori. Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna alla heltal x som uppfyller

$$19x \equiv 17 \pmod{34}.$$

(Reducera ditt svar modulo 34.)

Lösning: Euklides algoritm ger

$$34 = 1 \cdot 19 + 15, \quad 19 = 1 \cdot 15 + 4, \quad 15 = 3 \cdot 4 + 3, \quad 4 = 1 \cdot 3 + 1,$$

vilket leder till

$$1 = 4 - 1 \cdot (15 - 3 \cdot 4) = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 15 = 4 \cdot (19 - 1 \cdot 15) - 1 \cdot 15 = 4 \cdot 19 - 5 \cdot 15 = 4 \cdot 19 - 5 \cdot (34 - 1 \cdot 19) = 9 \cdot 19 - 5 \cdot 34$$

så den multiplikativa inversen till 19 modulo 34 är alltså 9. Detta ger

$$19x \equiv 17 \pmod{34} \Leftrightarrow 9 \cdot 19x \equiv 9 \cdot 17 \pmod{34} \Leftrightarrow x \equiv 17 \pmod{34}$$

eftersom $9 \cdot 17 \equiv 17 (\text{mod } 34)$.

5. Relationer. Avgör vilka av följande relationer $\mathcal{R}$ från en mängd $\mathbb{Z}$ till $\mathbb{Z}$ som också kan uppfattas som funktioner från en mängd $A \subset \mathbb{Z}$ till $\mathbb{Z}$:

(a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy = 1$
(b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy = 0$
(c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 1$
(d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \neq 1$
(e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

För de som är funktioner ange största möjliga definitionsmängd – A, för de som inte kan uppfattas som funktioner, ge exempel på element $(x_1, y) \in \mathcal{R}$ och $(x_2, y) \in \mathcal{R}$ där $x_1 \neq x_2$ som alltså visar att de inte är funktioner. *(Lösningen är godkänd om du missar en av dessa, men fyra måste vara rätt för att lösningen ska vara godkänd. Var extra noggrann med att minnas att du bara arbetar med heltal!)*

Lösning: *(a)* Detta definierar en funktion genom $y = 1/x$ som bara är definierad i $x = \pm 1$ med funktionsvärdet $y = f(\pm 1) = \pm 1$. Den är inte definierad för några andra värden på x. *(b)* $xy = 0$ definierar *inte* en funktion eftersom vi har till exempel $(2, 0) \in \mathcal{R}$ och $(1, 0) \in \mathcal{R}$ och $2 \neq 1$. *(c)* Detta definierar funktionen $y = f(x) = 1 - x$ som är definierad för alla $x \in \mathcal{R}$. *(d)* Detta definierar *inte* en funktion eftersom vi till exempel har $(1, 1) \in \mathcal{R}$ $(1 + 1 = 2 \neq 1)$ och $(2, 1)\mathcal{R}$ $(2 + 1 = 3 \neq 1)$ och eftersom $1 \neq 2$ så visar detta att vi inte har en funktion i det här fallet. *(e)* Detta definierar *inte* heller en funktion eftersom vi har $(1, 1) \in \mathcal{R}$ $(1^2 = 1^2)$ respektive $(-1, 1) \in \mathcal{R}$ $((-1)^2 = 1^2)$ men, återigen $-1 \neq 1$.

6. Fördjupad talteori. Låt talet a vara vilket tal som helst och bilda matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt M^n beteckna matrisen som uppstå genom multiplikation av n stycken M-matriser $(M^n = M \cdot M \cdot \ldots \cdot M)$ där $n \geq 1$ är ett heltal. Gissa en formel för A^n och bevisa den med matematisk induktion. (Alltså $M^n = \ldots$.)

Lösning: Vi har efter multiplikation

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + a \cdot 0 & 1 \cdot a + a \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot a + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

på liknande sätt ser vi att $M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och vi gissar därför formeln $M^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och vi kallar påståendet att formeln gäller för heltalet $n \geq 1$ för A_n med $VL_n = M^n$ respektive $HL_n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vi bevisar nu $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : A_n$ med matematisk induktion. ($\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.)

Steg 1. Kontrollera att A_1 stämmer, det vill säga att

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Men detta är bara definitionen av matrisen M så A_1 är sann.

Steg 2. Vi ska nu visa att implikationen $A_p \Rightarrow A_{p+1}$ gäller för alla heltal $p \geq 1$ och vi låter därför $p \geq 1$ vara ett godtyckligt heltal och antar att

$$A_p \Leftrightarrow VL_p = HL_p \Leftrightarrow M^p = \begin{pmatrix} 1 & p \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Med hjälp av detta ska vi visa att A_{p+1} gäller, det vill säga att

$$VL_{p+1} = M^{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & (p+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = HL_{p+1}.$$

Vi studerar VL_{p+1} noggrannare och får

$$VL_{p+1} = M^{p+1} = M \cdot M^p = M \cdot VL_p$$

men enligt induktionsantagandet gäller $VL_p = HL_p$ så att vi kan ersätta VL_p med HL_p och få

$$VL_{p+1} = M \cdot HL_p = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & pa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & pa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + a \cdot 0 & 1 \cdot pa + a \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot pa + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

och genom omskrivning inses sista termen vara

$$\begin{pmatrix} 1 & (p+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = HL_{p+1}$$

vilket visar att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ så att A_{p+1} är sann. Detta visar att $A_p \Rightarrow A_{p+1}$ gäller för alla $p \in \mathbb{Z}^+$.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. Låt $G = (V, E)$ vara den fullständiga grafen (samtliga möjliga kanter ingår) med n hörn. Bestäm det antal kanter som ska tas bort för att vi ska få ett uppspännande träd.

Lösning: Den fullständiga grafen med n hörn har $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter. Ett uppspännande träd har $n-1$ kanter (antal hörn -1). Antal kanter som ska tas bort från den fullständiga grafen blir alltså

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2-n}{2} - \frac{2n-2}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Antal kanter som ska tas bort från den fullständiga grafen med bara ett hörn blir då $\frac{(1-1)(1-2)}{2} = 0$ vilket stämmer eftersom grafen med bara ett hörn redan är ett uppspännande träd, nämligen sig själv. Samma sak gäller den fullständiga grafen med två hörn, som redan är sitt eget uppspännande träd och antal kanter som ska tas bort blir återigen $\frac{(2-1)(2-2)}{2} = 0$.

8. Kombinatorik. Låt mängderna A, B, C vara givna med följande egenskaper:

1. A, B, C har alla samma antal element,
2. $|A \cup B \cup C| = 6$,
3. $|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = 1$.
4. Det finns inga element som ligger i alla tre mängderna.

Beräkna antalet element i A. (Venndiagram får inte användas.)

Lösning: Principen för inklusion och exklusion för tre mängder anger att

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Villkor 1 ovan ger $|A| = |B| = |C|$, och denna information tillsammans med villkor 2, 3 och 4 insatta i ovanstående ekvation ger oss

$$6 = |A| + |A| + |A| - 1 - 1 - 1 + 0 \Leftrightarrow 6 = 3|A| - 3 \Leftrightarrow 3|A| = 9 \Leftrightarrow |A| = 3.$$

(Och då blir också $|B| = |C| = 3$.)

9. Sannolikhetslära. Vi antar att vi har tre olika sjukdomar, S_1, S_2, S_3 där ett speciellt symtom A uppträder. Sannolikheten för att en patient ska ha sjukdomarna S_1, S_2, S_3 är 5%, 10%, respektive 5%. (Det är alltså ganska vanliga sjukdomar.) Vi gör också antagandet att en patient inte kan kan ha mer än en av dessa sjukdomar samtidigt. Sannolikheten att symtomet A uppträder vid sjukdomarna S_1, S_2, S_3 är 5%, 40%, respektive 90%. En patient har symtomet A. Beräkna sannolikheten att patienten har sjukdomen S_2.

Återigen, eftersom miniräknare inte är ett tillåtet hjälpmedel är det tillräckligt att teckna det numeriska uttrycket för svaret, du behöver alltså inte räkna ut precis vad det blir, men det ska vara korrekt och sättet som du kommer fram till uttrycket måste också vara korrekt.

Lösning: Vi inför händelserna S_1, S_2, S_3, F för att patienten ska ha sjukdomarna S_1, S_2, S_3 respektive att patienten inte har någon av sjukdomarna (F står alltså för att patienten är frisk, eller i alla fall inte har någon av de tre sjukdomarna). Vi inför också händelsen A som förstås betecknar att patienten har symtomet. Vi söker $P(S_2|A)$.

Eftersom händelserna S_1, S_2, S_3, F partitionerar utfallsrummet ger oss Bayes sats att

$$P(S_2|A) = \frac{P(A|S_2) \cdot P(S_2)}{P(A)} = \frac{P(A|S_2) \cdot P(S_2)}{P(A|S_1) \cdot P(S_1) + P(A|S_2) \cdot P(S_2) + P(A|S_3) \cdot P(S_3) + P(A|F) \cdot P(F)}.$$

De olika värdena från texten ovan insatta ger oss

$$P(S_2|A) = \frac{0.4 \cdot 0.1}{0.05 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.05 + 0 \cdot 0.8} = \frac{0.04}{0.0875} \quad (\approx 45.7\%).$$