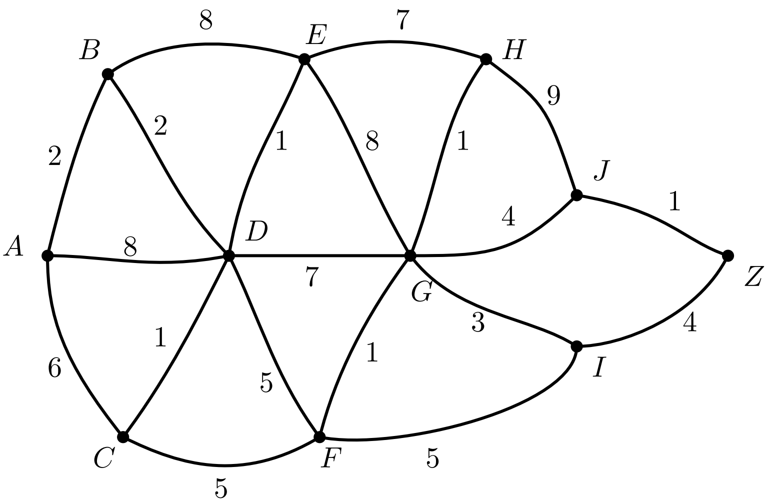
3. Funktioner – extrauppgift. Definiera funktionen $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genom $\phi(x, y) = (x + y, x - y)$. Är denna funktion bijektiv? Visa det i så fall. Om denna funktion inte är bijektiv, visa det.

Lösning: Att ϕ är bijektiv är samma sak som att ϕ är inverterbar så om ekvationen $(u, v) = \phi(x, y)$ alltid har en entydig lösning i (u, v) så är saken klar. Vi studerar därför ekvationen $(u, v) = \phi(x, y)$ som kan skrivas om som ekvationssystemet

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med två obekanta, koefficientmatrisen är kvadratisk (2x2) och systemet har alltså en lösning om och endast om determinanten för koefficientmatrisen är skild från noll. Koefficientmatrisen är $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ som har determinanten $1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$ vilken tydligen är skild från noll vilket fullbordar beviset av att den givna funktionen (ϕ) är bijektiv. (Det är också ok att bara lösa ekvationssystemet utan att hänvisa till determinanter.)

7. Grafteori. Använd Dijkstras Algoritm för att hitta billigaste vägen från A till Z, se till att alla hörn får etiketter och redovisa alla kandidatetiketter. Du kan använda den version av Dijkstras algoritm som gåtts igenom i kursen men du får också använda matrisversionen om du hittat den någon annanstans. (Troligen på nätet.)



Lösning: Dijkstras algoritm körs i 10 steg numrerade från 0 till 9 där etiketter införs. På varje rad redovisas kandidatetiketter med vald etikett i fetstil.

Steg 0. ***A(-,0)***.
Steg 1. ***B(A,2)***, *D(A,8)*, *C(A,6)*.
Steg 2. *E(B,10)*, ***D(B,4)***, *C(A,6)*.
Steg 3. ***E(D,5)***, *G(D,10)*, *F(D,9)*, ***C(D,5)***.
Steg 4. *H(E,12)*, *G(D,10)*, ***F(D,9)***.
Steg 5. ***G(F,10)***, *I(F,14)*, *H(E,12)*.
Steg 6. ***H(G,11)***, *J(G,14)*, *I(G,13)*.
Steg 7. *J(G,14)*, ***I(G,13)***.
Steg 8. ***J(G,14)***, *Z(I,17)*.
Steg 9. ***Z(J,15)***.

Från detta avläser vi billigaste vägen till

$$A - B - D - F - G - J - Z$$

och att den har kostnaden 15.

8. Kombinatorik. Representationer av ickenegativa heltal (≥ 0) görs med de tio siffrorna 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9. 123 har tre siffror. 1430 har fyra siffror. Det enda tal som kan ha en inledande nolla är talet 0 självt, vi skriver alltså inte "01" eller "002" om vi vill ange representationen av talen 1 respektive 2. Hur många representationer av ickenegativa heltal med finns med fyra eller färre siffror där *minst* en av siffrorna är 0 men där hela representationen bara innehåller siffrorna 0, 1, 2 eller 3? (Inga 4:or, 5:or, ... , 9:or.) Det räcker *inte* med en rå uppräkning av de möjliga representationerna (de är dessutom ganska många så det går troligen inte), du behöver redovisa något slags systematiskt resonemang som tar fram antalet representationer som uppfyller de krav som ställs.

Ledning: Som delberäkning, ta fram hur många representationer som inte har någon 0:a alls. Dela också upp i fyra fall: representationer med 1 siffra, med 2, med 3 och slutligen representationer med 4 siffror.

Lösning: Vi kan dela upp utredningen i fyra fall:

1. Antal representationer med en siffra.
2. Antal representationer med två siffror.
3. Antal representationer med tre siffror.
4. Antal representationer med fyra siffror.

Dessa fall är alla disjunkta så enligt additionsprincipen kan vi bara addera dessa respektive antal för att få det sökta antalet representationer. Vi kan nu resonera fall för fall:

1. *En siffra.* Enligt kraven ska minst en nolla ingå, men eftersom vi bara har en siffra måste den siffran vara just 0 så det finns bara 1 representation under fall 1 som uppfyller kraven.
2. *Två siffror.* Första siffran måste vara 1, 2, eller 3. Eftersom minst en nolla måste ingå måste alltså andra siffran väljas till 0 och vi har då alltså de tre representationerna 10, 20, respektive 30 som uppfyller kraven under fall 2. Alltså 3 stycken.
3. *Tre siffror.* Nu blir det lite mer komplicerat. Om vi betecknar med dxx det antal representationer med tre siffror som kan bildas där första siffran väljs som 1, 2 eller 3 (symboliserad av d) och där de två följande siffrorna väljs som nåon av siffrorna 0,1,2 eller 3 (symboliserade av de två x:n) har vi enligt multiplikationsprincipen $3 \cdot 4 \cdot 4$ antal val (först väljs en av siffrorna 1, 2, 3 – 3 sätt, sedan väljs en av siffrorna 0,1,2,3 – 4 sätt, och sedan 4 sätt igen för sista siffran). Detta ger oss då 48 representationer där första siffran är 1, 2 eller 3 och de andra siffrorna väljs fritt. Men nu skulle vi också lägga till kravet att minst en nolla måste ingå så då kan vi från detta antal (48) subtrahera alla de varianter där vi inte har någon nolla: dett antal kan vi beteckna med ddd som då räknas ut som $3 \cdot 3 \cdot 3$ enligt multiplikationsprincipen där vi alltså väljer alla möjliga representationer där alla tre siffrorna väljs frå 1,2 och 3. Det antalet blir $ddd = 27$ och de totala antalet representationer under fall 3 blir därför
$$dxx - ddd = 48 - 27 = 21.$$
4. *Fyra siffror.* På ett fullständigt analogt sätt akn vi räkna ut att antalet representationer under fall 4 blir
$$dxxx - dddd = 192 - 81 = 111.$$

Totala antalet representationer blir till slut

$$1 + 3 + 21 + 111 = 136.$$

9. Sannolikhetslära. Låt A, B vara två oberoende händelser med $P(A^c) = 0.5$ och $P(B^c) = 0.3$.

a) Ange $P(A)$ och $P(B)$.
b) Om A, B är oberoende, vad är $P(A \cup B)$?

Lösning: (a) Vi har $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.5 = 0.5$ respektive $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$.
(b) Vi har
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
och eftersom A, B är oberoende har vi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$ så att
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - 0.5 \cdot 0.7 = 1.2 - 0.35 = 0.85 \quad (= 85\%).$$