Kontrollskrivning 1 – HT2020

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen.

1. Logik. Är följande slutledning giltig? Om den är riktig, visa hur slutsatsen följer av premisserna genom att ange alla slutledningsregler som används för att komma till slutsatsen. Om slutledningen inte är giltig, ange tilldelningar av sanningsvärden till p, q, r, t som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1.	$p \to q \lor r$
2.	$q \to t \lor \neg r$
3.	$r \to t \lor \neg q$
4.	$\neg t$
$\therefore$	$r \land q \to \neg p$

Lösning: Slutledningen är giltig vilket framgår av följande detaljerade framställning av de respektive tillämpningar av aktuella härledningregler:

5.	$r \land q$	Antagande för hypotetisk härledning
6.	r	förenkling av 5. (och 5)
7.	$\neg t \land r$	sammanslagning av 4,6 (och 5)
8.	$\neg(t \lor \neg r)$	7, och DeMorgans lag (och 5)
9.	$\neg q$	8,2, Modus Tollens (och 5).
10.	q	förenkling av 5. (och 5)
11.	$\neg t \land q$	sammanslagning av 4,10 (och 5)
12.	$\neg(t \lor \neg q)$	11, DeMorgans lag (och 5)
13.	$\neg r$	12,2,Modus Tollens (och 5)
14.	$\neg q \land \neg r$	9,13 (och 5)
15.	$\neg(q \lor r)$	14, DeMorgans lag (och 5)
16.	$\neg p$	15,1,Modus Tollens (och 5)
17.	$r \land q \to \neg p$	5-16 och hypotetisk härledning.

Kommentar: vi skulle kunna dra en viktig slutsats redan efter 10 ... varför det?

2. Mängder. Låt A, B, C vara tre godtyckliga icketomma mängder som uppfyller $A \times B \subset B \times C$ och $B \times C \subset C \times A$. Visa att $A = B = C$.

Lösning: Välj $x \in A$ godtyckligt. Då finns ett $y \in B$ så att

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in B \times C \Rightarrow x \in B$$

det vill säga $x \in A \Rightarrow x \in B$ så att vi har $A \subset B$. På samma sätt visas $B \subset C$. Låt nu $z \in C$ vara ett godtyckligt element. Då finns $y \in B$ så att

$$(y, z) \in B \times C \Rightarrow (y, z) \in C \times A \Rightarrow z \in A$$

vilket visar att $C \subset A$. Vi har alltså $A \subset B \subset C \subset A$, detta ger $A = B = C$.

3. Funktioner. Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vara given och definiera funktionerna f, g på A genom

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\} \qquad g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

Visa att funktionen $h : A \to A$ given av $h = f \circ g \circ f^{-1}$ är en bijektion.

Lösning: Enklast är att bara teckna ett uttryck för h. Eftersom h är en sammansättning av de tre funktionerna f, g, f^{-1} och f och g redan är kända så behövs ett uttryck för f^{-1}, det vill säga inversen till f. Vi inverterar därför f:

$$f^{-1} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}^{-1} = \{(2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\}$$

och vid en inspektion av denna mängd av ordnade par ser vi att denna mängd i själva verket är f så funktionen f är sin egen invers. Då har vi alltså

$$h = f \circ g \circ f$$

och om vi går igenom hur de olika elementen i A avbildas genom funktionerna f, g, f får vi

$1 \mapsto f(1) = 2 \mapsto g(2) = 3 \mapsto f(3) = 4$, så $1 \mapsto 4$ under h,
$2 \mapsto f(2) = 1 \mapsto g(1) = 2 \mapsto f(2) = 1$, så $2 \mapsto 1$ under h,
$3 \mapsto f(3) = 4 \mapsto g(4) = 1 \mapsto f(1) = 2$, så $3 \mapsto 2$ under h,
$4 \mapsto f(4) = 3 \mapsto f(3) = 4 \mapsto f(4) = 3$, så $4 \mapsto 3$ under h.

Sammanfattningsvis ser vi att

$$h = \{(1,4), (2,1), (3,2), (4,3)\}$$

och eftersom alla element i A är bilder av denna funktion är den surjektiv och eftersom inga två skilda element (av $1, 2, 3, 4$) avbildas på samma element är den injektiv. Eftersom tydligen h är både injektiv och surjektiv är den bijektiv.

5. Relationer. Låt U vara mängden av alla kvadratiska matriser med n rader. Låt vidare I beteckna delmängden av alla inverterbara matriser i U. Vi inför relationen $\mathcal{R}$ på U genom

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists P \in I : A = PBP^{-1}.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Ledning: Om två matriser, Q och R är inverterbara är också QR inverterbar med $(QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$.

Lösning: Vi ska visa att relationen $\mathcal{R}$ är *reflexiv*, *symmetrisk* och *transitiv*.

* *Reflexiviteten:* Låt A vara en godtycklig kvadratisk matris i U. Eftersom $A = E \cdot A \cdot E^{-1}$ så gäller tydligen $A\mathcal{R}A$ och eftersom A var godtyckligt vald i U måste $\mathcal{R}$ vara reflexiv.

* *Symmetrin:* Välj A och B godtyckligt i U och antag att $A\mathcal{R}B$. Då finns en inverterbar matris P sådan att
$$A = PBP^{-1}.$$
Multiplikation från vänster med P^{-1} ger $P^{-1}A = BP^{-1}$ och multiplikation från höger med P ger $P^{-1}AP = B$ som kan skrivas om som
$$B = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$$
och eftersom $P^{-1} \in I$ visar detta att $B\mathcal{R}A$ vilket visar symmetrin eftersom A och B var godtyckligt valda.

* *Transitiviteten:* Välj återigen $A, B, C \in U$ godtyckliga men med $A\mathcal{R}B$ och $B\mathcal{R}C$. Vi ska nu visa att vi också har $A\mathcal{R}C$. Att $A\mathcal{R}B$ och $B\mathcal{R}C$ innebär att det finns inverterbara matriser Q och R sådana att
$$A = QBQ^{-1} \qquad B = RCR^{-1}$$
och om vi sätter in uttrycket för B (till höger) i uttrycket till vänster får vi
$$A = Q(RCR^{-1})Q^{-1}$$
som kan skrivas om som
$$A = (QR) \cdot C \cdot (R^{-1}Q^{-1}) \Leftrightarrow A = (QR) \cdot C \cdot (QR)^{-1}$$
vilket visar att $A\mathcal{R}C$ och eftersom A, B, C var godtyckligt valda med $A\mathcal{R}B$ och $B\mathcal{R}C$ visar detta transitiviteten.