Tentamen i CM1000 – Diskret Matematik – januari 2021, lösningsförslag

Del I

1. Logik. Formulera och bevisa en av DeMorgans lagar för tre utsagor, p, q, r. (Alltså $\neg(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \ldots$ med mera.) Sanningstabell får inte användas men du får använda DeMorgans lag för två utsagor.

Lösning: DeMorgans ena lag för tre utsagor lyder: för godtyckliga utsagor p, q, r gäller

$$\neg(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

Bevis: Vi kan skriva $p \vee q \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ vilket ger

$$\neg(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \neg(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

vilket fullbordar beviset. (DeMorgans lag för två utsagor används alltså i två steg.)

2. Mängdlära. Inför operationen $E \oplus F = (E - F) \cup (F - E)$ och sätt $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ respektive $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 10\}$. Beräkna $|(A \cap B) \cup (B \cap C) \times (A \oplus B \oplus C)|$.

Lösning: Vi finner först $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ och $A \oplus B \oplus C$. Vi har $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3, 4, 7\} \cup \{5, 6, 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Vidare har vi

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 8\} \cup \{5, 6, 9\} = \{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$$

vilket ger

$$A \oplus B \oplus C = \{1, 2, 5, 6, 8, 9\} \oplus \{1, 2, 5, 6, 7, 10\} =$$

$$(\{1, 2, 5, 6, 8, 9\} - \{1, 2, 5, 6, 7, 10\}) \cup (\{1, 2, 5, 6, 7, 10\} - \{1, 2, 5, 6, 8, 9\}) =$$

$$\{8, 9\} \cup \{7, 10\} = \{7, 8, 9, 10\}$$

och detta ger

$$|(A \cap B) \cup (B \cap C) \times (A \oplus B \oplus C)| = |(A \cap B) \cup (B \cap C)| \cdot |(A \oplus B \oplus C)| =$$

$$|\{3, 4, 5, 6, 7\}| \cdot |\{7, 8, 9, 10\}| = 5 \cdot 4 = 20.$$

3. Funktioner. Beteckna med M_{2x2} mängden av alla 2x2-matriser, alltså

$$M_{2x2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

På denna mängd inför vi det så kallade *spåret* som är en funktion $sp : M_{2x2} \to \mathbb{R}$ som är definierad som summan av elementen i argumentets diagonal, det vill säga:

$$sp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

(a) Visa att sp inte är en injektiv funktion, men att den är surjektiv.
(b) Visa att restriktionen av sp till mängden av alla symmetriska matriser uppfyller

$$sp(AB) = sp(BA).$$

(Här betecknas A, B två symmetriska matriser, som alltså uppfyller $A = A^t$ och $B = B^t$.)

Ledning: En godtycklig symmetrisk 2x2-matris kan betecknas med $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Lösning: (a): Funktionen sp är **inte injektiv** eftersom vi till exempel har

$$sp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 = 1 + 1 = sp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och eftersom tydligen de olika matriserna $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avbildas på samma värde (2) är den inte injektiv. Vidare är funktionen sp **surjektiv** eftersom om y är ett godtyckligt reellt tal så har vi

$$sp\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = y + 0 = y.$$

Funktionen sp kan alltså anta vilket värde som helst $y \in \mathbb{R}$ vilket visar surjektiviteten.

(b): Vi ska nu visa egenskapen $sp(AB) = sp(BA)$ för restriktionen av sp till mängden av alla symmetriska matriser, vi studerar alltså hur sp beter sig på delmängden av M_{2x2} som består av symmetriska matriser. Här vill vi visa att vi alltid har $sp(AB) = sp(BA)$ och vi betecknar därför två godtyckliga symmetriska matriser A, B med

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}d & e\\ e & f\end{pmatrix}$$

och nu är det bara att räkna ut $sp(AB)$ och $sp(BA)$ och kontrollera att de antar samma värde. Vi får

$$sp\left(\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}d & e\\ e & f\end{pmatrix}\right) = sp\begin{pmatrix}ad+be & ae+bf\\ db+ce & be+cf\end{pmatrix} = ad + be + be + cf$$

respektive

$$sp\left(\begin{pmatrix}d & e\\ e & f\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\right) = sp\begin{pmatrix}da+eb & db+ec\\ ea+fb & eb+fc\end{pmatrix} = da + eb + eb + fc$$

och eftersom dessa uttryck har samma värde är beviset fullbordat. Anmärkning: observera att vi egentligen inte behöver räkna ut precis vad elementen på rad 1, kolonn 2 respektive rad 2 kolonn 1 i matrisprodukterna AB respektive BA är, värdet av tr beror ju bara på de tal som står i diagonalen, så det skulle varit ok att bara skriva $sp(AB) = sp\begin{pmatrix}ad+be & \dots\\ \dots & be+cf\end{pmatrix}$, vi behöver alltså inte räkna ut de tal som ska stå där det står ”...”. (Det är faktiskt också så att vi inte ens behöver symmetri, vi har alltid $sp(AB) = sp(BA)$ för *alla* kvadratiska 2x2-matriser.)

4. Inledande talteori. Om n *inte* är delbart med 7, visa att $n^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Lösning: Om n inte är delbart med 7 så är det 6 fall (alla räkningar sker modulo 7): $n \equiv 1$, $n \equiv 2$, $n \equiv 3$, $n \equiv 4$, $n \equiv 5$ respektive $n \equiv 6$. Då får vi

$$\begin{aligned}
&n \equiv 1 \Rightarrow n^6 \equiv 1^6 = 1\\
&n \equiv 2 \Rightarrow n^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1\\
&n \equiv 3 \Rightarrow n^6 \equiv 3^6 = 9^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1\\
&n \equiv 4 \Rightarrow n^6 \equiv 4^6 = 2^6 \cdot 2^6 \equiv 1 \cdot 1 = 1\\
&n \equiv 5 \Rightarrow n^6 \equiv 5^6 \equiv (-2)^6 = 2^6 \equiv 1 \text{ (som syntes ovan.)}\\
&n \equiv 6 \Rightarrow n^6 \equiv 6^6 = 2^6 \cdot 3^6 \equiv 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

5. Relationer. Låt mängden A vara given som mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^2$, *utom* nollvektorn. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u \cdot v \neq 0.$$

(a) Är $\mathcal{R}$ reflexiv? Varför, varför inte?
(b) Är $\mathcal{R}$ symmetrisk? Varför, varför inte?
(c) Är $\mathcal{R}$ transitiv? Varför, varför inte?
(d) Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation? Varför, varför inte?

(*Ledning:* ”$\cdot$” betecknar den vanliga skalärprodukten, det vill säga $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.)

Lösning: *(a)* Eftersom vi utesluter just nollvektorn blir relationen reflexiv eftersom vi för varje vektor $A \ni u = (x, y) \neq (0, 0)$ har $u \cdot u = x^2 + y^2 > 0$. *(b)* Relationen blir också symmetrisk eftersom $u \cdot v = v \cdot u$, detta leder till

$$u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u \cdot v \neq 0 \Leftrightarrow v \cdot u \neq 0 \Leftrightarrow v\mathcal{R}u$$

vilket precis innebär symmetri. *(c)* relationen är däremot inte transitiv eftersom vi kan konstruera tre vektorer, u, v, w med $u\mathcal{R}v \wedge v\mathcal{R}w$ men där vi inte har $u\mathcal{R}w$. Ett exempel på tre sådana vektorer är

$$u = (0, 1), \qquad v = (1, 1) \qquad w = (1, 0).$$

En kort kalkyl ger

$$u \cdot v = (0, 1) \cdot (1, 1) = 1 \neq 0 \Leftrightarrow u\mathcal{R}v \qquad v \cdot w = (1, 1) \cdot (1, 0) = 1 \neq 0 \Leftrightarrow v\mathcal{R}w$$

och slutligen

$$u \cdot w = (0,1) \cdot (1,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \text{ så att vi inte har } u\mathcal{R}w.$$

Relationen är därmed inte transitiv. *(d)* Eftersom relationen inte är transitiv kan den *inte* vara en ekvivalensrelation. (En ekvivalensrelation måste ju vara reflexiv, symmetrisk och transitiv.)

6. Fördjupad talteori. Använd matematisk induktion för att visa olikheten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ledning: Vid en punkt i räkningarna behöver du kanske övertyga dig om att olikheten

$$2\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t+1}} < 2\sqrt{t+1}$$

gäller för vissa värden på t. Detta görs enklast genom att skriva om den som $\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ och förlänga båda led med det positiva talet $\sqrt{t+1} + \sqrt{t}$. Då är det lättare att se att olikheten är uppfylld.

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vi ska med matematisk induktion visa $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$. Vi inför också beteckningarna $VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ respektive $HL_n = 2\sqrt{n}$ och konstaterar alltså att $A(n) \Leftrightarrow VL_n < HL_n$. Vi tar nu de tre stegen i ett induktionsbevis:

Steg 1. Vi kontrollerar att $A(1)$ är sann, det vill säga att $VL_1 < HL_1$.

$$VL_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \qquad HL_1 = 2\sqrt{1} = 2$$

och vi ser att $VL_1 = 1 < 2 = HL_1$ så $A(1)$ är sann vilket fullbordar första steget i induktionen.

Steg 2. Vi ska nu visa implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ för godtyckliga positiva heltal p så vi låter p vara ett positivt heltal för vilket $A(p)$ gäller. Detta är induktionsantagandet och vi har alltså

$$A(p) \Leftrightarrow VL_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{p} = HL_p.$$

Med hjälp av detta ska vi visa att $VL_{p+1} < HL_{p+1}$. Vi arbetar därför med $VL_{p+1} =$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} = VL_p + \frac{1}{\sqrt{p+1}}.$$

Enligt induktionsantagande är $VL_p < HL_p$ så vi får en uppskattning uppåt om vi ersätter VL_p med HL_p i ovanstående uttryck. Då har vi alltså

$$VL_{p+1} < HL_p + \frac{1}{\sqrt{p+1}} = 2\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}}.$$

Målet är att övertyga sig om att detta till sist är mindre än $HL_p = 2\sqrt{p+1}$ så steg 2 kan fullbordas om vi kan inse att

$$2\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} \leq 2\sqrt{p+1}.$$

Att detta gäller kan inses genom att skriva om detta som den ekvivalenta olikheten

$$\sqrt{p+1} - \sqrt{p} \geq \frac{1}{2\sqrt{p+1}}$$

som efter förlängning med $\sqrt{p+1} + \sqrt{p}$ övergår i

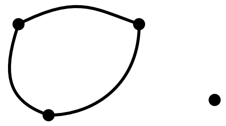
$$(\sqrt{p+1} - \sqrt{p})(\sqrt{p+1} + \sqrt{p}) = 1 \geq \frac{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}{2\sqrt{p+1}}$$

vilket gäller eftersom täljaren i bråket i högerledet är mindre än nämnaren. Detta fullbordar steg 2 i induktionsbeviset.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 samt induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. För alla grafer G gäller att om G inte har någon cykel så är antalet hörn större än antalet kanter. Gäller omvändningen, det vill säga gäller det att om en graf G har antalet hörn större än antalet kanter så kan den inte heller ha någon cykel? Ja, eller nej? Bevisa ditt påstående.

Lösning: Svaret är *nej*, det är inte nödvändigt att en graf med fler hörn än kanter inte har cykler, vi illustrerar detta genom att visa följande graf:



Grafen har som synes en cykel, 4 hörn (varav ett isolerat) som är fler än antalet kanter som är 3.

8. Kombinatorik. Hur många sexsiffriga tal kan bildas med siffrorna 0, 0, 1, 1, 2 och 2? (Observera att ett sexsiffrigt tal inte kan starta med 0.)

Lösning: Vi kan räkna ut svaret som $M - N$ där M är totala antalet omordningar av de sex symbolerna 0, 0, 1, 1, 2 och 2 utan restriktioner och där N är antalet omordningar av dessa symboler som inleds med en nolla. Vi får då:

1. M som ett resultat av en valprocess i tre steg: placera ut nollorna – $\binom{6}{2} = 15$, placera ut ettorna – $\binom{4}{2} = 6$, placera ut tvåorna – $\binom{2}{2} = 1$. Så vi får $M = 15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$.
2. N som ett resultat av en valprocess i fyra steg där vi inleder genom att placera ut en nolla först: 1 sätt, sedan placerar vi ut nästa nolla – 5 sätt, sedan ettorna – $\binom{4}{2} = 6$ och till sist tvåorna – $\binom{2}{2} = 1$. Så vi får $N = 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 = 30$.

Sammantaget blir totala antalet sexsiffriga tal lika med $90 - 30 = 60$.

9. Sannolikhetslära. Det finns vetenskapliga studier som tyder på att utgången av sjukdomsförloppet vid COVID-19 kan vara sämre vid D-vitaminbrist. Andra studier visar också att D-vitaminbrist är olika vanligt i olika folkgrupper och i USA kan befolkningen grovt delas in i följande folkgrupper: vita (69%), latinamerikaner (18%) och svarta (13%). Av USAs svarta befolkning har 82% D-vitaminbrist medan 70% av latinamerikanerna respektive 42% av de vita har D-vitaminbrist.

(a) Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald person från den totala populationen (USA) har D-vitaminbrist.

(b) Beräkna sannolikheten att en person som har D-vitaminbrist är svart.

Du behöver *egentligen inte* räkna ut exakta numeriska värden som svar, det räcker med att ange numeriska uttryck för de korrekta numeriska värdena – även om du självklart måste motivera varför uttrycken ser ut som de gör. Miniräknare är ju inte ett tillåtet hjälpmedel, men svara på ett sätt som gör att man lätt kan knappa fram det numeriska värdet med en miniräknare.

Lösning: Vi betraktar slumpprocessen att välja en person från USAs befolkning och vi inför följande händelser för att kunna beskriva olika förlopp:

Händelse D: Personen som valts *har* D-vitaminbrist.
Händelse S: Personen som valts är svart. Texten säger att $P(S) = 0.13$.
Händelse L: Personen som valts är latinamerikan. Texten säger att $P(L) = 0.18$.
Händelse V: Personen som valts är vit. Texten säger att $P(V) = 0.69$.

I *(a)* söker vi $P(D)$ och enligt satsen om total sannolikhet har vi

$$P(D) = P(D|S)P(S) + P(D|L)P(L) + P(D|V)P(V)$$

och enligt texten ovan r $P(D|S) = 0.82$, $P(D|L) = 0.70$ respektive $P(D|V) = 0.42$ vilket ger

$$P(D) = 0.82 \cdot 0.13 + 0.70 \cdot 0.18 + 0.42 \cdot 0.69 (= 0.5224 = 52.24\%).$$

I *(b)* sker vi sannolikheten $P(S|D)$. Vi kan använda sambandet

$$P(S|D) \cdot P(D) = P(D|S) \cdot P(S)$$

(Bayes sats i kort form) och därifrån få

$$P(S|D) = \frac{P(D|S)\cdot P(S)}{P(D)} = \frac{0.82\cdot 0.13}{0.82\cdot 0.13 + 0.70\cdot 0.18 + 0.42\cdot 0.69} \quad (\approx 0.2041 = 20.41\%.)$$

Anmärkning: 20.41% är ju väsentligt mer än de 13% som de svarta utgör. Liknande gäller för latinamerikaner och i Sverige har vi också sett att människor med olika etniska bakgrunder klarar sig olika bra gällande COVID-19. Studierna som visar att människor med bättre nivåer av vitamin-D klarar COVID-19 bättre kan då, tillsammans med dessa observationer, leda oss att tro att det är D-vitaminbrist som är en bakomliggande orsak. En förklaring kan vara att solen är den främsta källan till vitamin D och att människor med mörkare pigmentering i huden genererar mindre D-vitamin och att detta får följder för hur väl man klarar COVID-19. Så slutsatsen kanske kan bli att vi alla behöver se till att våra nivåer av vitamin D är goda? (Och även tipsa våra mörkhyade vänner om detta?)

Del II

10. För betyg C. *Kan också täcka delområdet inledande talteori.*

(a) Finn ett heltal x sådant att

$$x \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{och} \quad x \equiv 1 \pmod{17}.$$

(b) Om p, q är två skilda primtal, kan vi alltid hitta ett x med

$$x \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{och} \quad x \equiv 1 \pmod{q}?$$

Varför? Varför inte? Bevisa ditt påstående.

Lösning: *(a)* Vi kan skriva om $x \equiv 0 \,(\text{mod } 13)$ som att $x = s\cdot 13$ för något heltal s. Om detta sätts in i det andra kravet $x \equiv 1 \,(\text{mod } 17)$ får vi $s \cdot 13 \equiv 1 \,(\text{mod } 17)$ vilket kan skriva om som $s\cdot 13 = 1 - t\cdot 17$ för något heltal t. (Vi kan sätta dit ett minustecken på t eftersom det symboliserar ett heltal.) Men detta ger alltså

$$13\cdot s + 17\cdot t = 1$$

och tack vare Bezouts sats är det säkert att s, t finns eftersom $GCD(13, 17) = 1$ (två skilda primtal är alltid relativt prima varandra). Så nu kan Euklides utvidgade algoritm användas för att hitta s, t och därmed x, vi får

$$17 = 1\cdot 13 + 4, \qquad 13 = 3\cdot 4 + 1 \qquad 1 = 13 - 3\cdot(17 - 1\cdot 13) \Leftrightarrow 1 = 4\cdot 13 - 3\cdot 17$$

så $x = 4\cdot 13 = 52$ uppfyller de båda kraven $x \equiv 0 \,(\text{mod } 13)$ och $x \equiv 1 \,(\text{mod } 17)$. *(b)* I lösning till *(a)* studeras primtalen $p = 13$ respektive $q = 17$, men *ingenting* i lösningen (förutom de konkreta detaljerna i utförandet av Euklides utvidgade algoritm) förutsätter att vi arbetar med precis de två skilda primtalen 13 och 17. Det viktiga är att primtalen är skilda åt (för då blir de relativt prima). Så detta kommer alltså att fungera för godtyckligt valda skilda primtal p, q så även påståendet i *(b)* följer om vi byter 13 mot p respektive 17 mot q. (Vi skulle till och med kunna uppfatta detta som en alternativ formulering av Bezouts sats.)

Del III

11. För betyg A. *Kan också täcka delområdet relationer.* Låt mängden $A = \{a, b, c\}$ vara given. Vi ska studera (binära) relationer på A. De tre egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet* ska studeras. En relation på A kan definieras med en matris av nedanstående slag:

	a	b	c
a	x		x
b	x	x	x
c			x

där kryss används för att ange om element är relaterade eller inte. Vi antar konventionen att varje element (a, b, c) får varsinn rad och varsinn kolonn och omm det finns ett kryss på den rad som ett element står på så är elementet relaterat till det element i vars kolonn krysset står. Med denna konvention definierar matrisen ovan relationen

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}.$$

Vi ser till exemepel att $a\mathcal{R}a$ eftersom vi har ett kryss i rutan längst upp till vänster, det är raden för a och kolonnen för a. Vi ser också att $a\mathcal{R}c$ eftersom vi har ett kryss längst till upp till höger, alltså återigen på raden för a men kolonnen för c. Vi kan också avläsa en egenskap som den här relationen har: eftersom raden för b är full med kryss, så måste b vara relaterat till samtliga element (inklusive sig själv) i A. ($b\mathcal{R}a$, $b\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$)

En relation kan som bekant ha egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet.* Rita 8 diagram (av ovanstående typ) för 8 olika relationer som tillsammans har alla möjliga 8 kombinationer av dessa egenskaper, alltså de ska ha eller inte ha varje egenskap. Eftersom en relation kan ha eller inte ha en egenskap och det är tre egenskaper blir det totalt 8 möjligheter. Ange klart och tydligt vilken kombination av egenskaper varje relation har genom att beteckna diagrammen med bokstavskombinationer: ”`R-T`” betyder ”reflexiv, inte symmetrisk, men transitiv”. Du ska då alltså ange matriser för relationer som beskrivs av bokstavkombinationerna ”`---`” (ingen egenskap), ”`R--`” (reflexiv, inte symmetrisk, inte transitiv), ”`-S-`”, ”`--T`”, ”`RS-`, ”`-ST`”, ”`R-T`” och ”`RST`”. För att få godkänt på uppgiften ska minst 7 diagram vara korrekta. (Det är ok att missa ett alltså.)

Lösning: Egenskapen reflexivitet innebär att vi alltid ska ha $x\mathcal{R}x$ för alla $x \in \{a, b, c\}$, detta uttrycker sig genom att diagonalen är helt ifylld med kryss, det är egentligen den enklaste egenskapen att inse hur den ska avspeglas i diagrammen. Egenskapen symmetri innebär att $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$ för alla $x, y \in \{a, b, c\}$ vilket vi inser uttrycker genom att själva matrisen (diagrammet) med kryss i är lika med sin egen spegelbild i diagonalen. Med dessa saker i bagaget kan vi lätt sätta upp fyra diagram som vi kan beteckna `--`, `R-`, `-S` respektive `RS` för relationer som har alla kombinationer av egenskaperna *reflexivitet* och *symmetri*:

`RS`	a	b	c
a	x		
b		x	
c			x

`R-`	a	b	c
a	x	x	
b		x	
c			x

`-S`	a	b	c
a	x	x	
b	x		
c			

`--`	a	b	c
a	x	x	
b		x	
c			

Här ger de två första diagrammen två relationer som är reflexiva (eftersom hela diagonalen är ifylld), men den andra är inte symmetrisk eftersom vi har $a\mathcal{R}b$ men inte $b\mathcal{R}a$. De följande två diagrammen ger relationer där den ena är symmetrisk och den andra inte är symmetrisk men vi har så att säga tagit bort egenskapen reflexivitet genom att se till att inte hela diagonalen har kryss i sig. Vi kan även observera att det tredje diagrammet (`-S`) skulle kunnat vara *helt tomt* och då ge en relation som är icke-reflexiv men symmetrisk.

Vi ska nu, utgående från dessa fyra diagram göra små modifikationer så att 8 diagram uppstår. Till att börja med konstaterar vi att relationen som defineras av diagrammet betecknat med `RS` också ger en transitiv relation. Det är i själva verket *likhetsrelationen*, vi ser att $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$. Om vi ska göra modifikationer till detta diagram för att ta bort transitiviteten (men behålla reflexiviteten och symmetrin) ska vi alltså konstruera x, y, z med $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$ men där inte $x\mathcal{R}z$. Efter lite funderande inser man att det enda sättet att åstakomma detta är att utgå från ett fullt diagram med alla kryss ifyllda, men ta bort precis två kryss som är spegelbilder av varandra, till exempel diagrammet

`RS-`	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	x
c		x	x

kommer att duga eftersom vi har $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$ men inte $a\mathcal{R}c$. Vi har nu två relationer en som svararar mot `RST` (som vi betecknade med `RS` ovan) respektive en som svarar mot `RS-` (som togs fram här).

Vi går vidare och utröner om diagrammet betecknat med `R-` ger en transitiv relation eller inte. Den definierande egenskapen för transitivitet är att implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ska gälla för alla möjliga val av x, y, z. Vi kan gå igenom dessa valmöjligheter på ett systematiskt sätt. Det finns två alternativ, antingen gäller $x = y$ eller $x \neq y$. Om $x = y$ så är det givetvis så att $x\mathcal{R}y$ (eftesom relationen är reflexiv) och om då även $y = z$ så följer $y\mathcal{R}z$ men också $x\mathcal{R}z$ så transitiviteten motsägs inte här. Det andra fallet är om $y \neq z$, den enda möjligheten då är att $y = a$ och $z = b$ men eftersom vi har $a\mathcal{R}b$ så kan inte implikationen bli falsk i detta fall heller. Sammantaget är alltså implikationen alltid sann då $x = y$. Det återstår att utreda fallet då $x \neq y$. Återigen, om vi ska ha $x\mathcal{R}y$ är den enda möjligheten att $x = a$ och $y = b$ och detta tvingar också fram att $z = b$ eftersom b endast är relaterat till sig själv. Men detta innebär att $x = a$ och $z = b$ och eftersom $a\mathcal{R}b$ så bli implikationen sann även här. Eftersom detta var en fullständig uttömning av alla möjligheter har vi visat att relationen är transitiv. Vi kan alltså sätta beteckningen `R-T` på diagrammet ovan som har beteckningen `R-`.

Hur kan vi nu modifiera diagrammet så att vi får en relation som ges av `R--`? Efter en stunds funderande kan vi komma på att vi bara kan ta diagrammet som betecknades `RS-` och stympa det, vi tar bort kryss så att symmetrin faller. Då duger alltså diagrammet

R--	a	b	c
a	x	x	
b		x	x
c			x

som också kan ses som R-T men med $b\mathcal{R}c$ adderad.

Vi går vidare och tar fram nästa fyra diagram som vi kan beteckna med -ST och -S- respektive --T och ---. Vi börjar med att betrakta diagrammet som är betecknat med -S:

-S	a	b	c
a	x	x	
b	x		
c			

Vi vill nu ta reda om denna relation är transitiv eller icke-transitiv. Efter en del funderande ser vi att relationen anger att

$$b\mathcal{R}a \qquad \text{och} \qquad a\mathcal{R}b$$

men att vi *inte* har $b\mathcal{R}b$. Det betyder att om vi sätter $x = b$, $y = a$, $z = b$ så kan denna tilldelning fungera som ett motexempel på att implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\ddagger$$

inte gäller för alla tilldelningar av element till x, y, z. Relationen är alltså *inte* transitiv. Det det betyder att vi kan beteckna relationen med -S också med -S-. Vi söker nu en relation som då kan betecknas med -ST och det ligger nu nära till hands att till det här aktuella diagrammet addera ett kryss så att vi får:

-S	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	
c			

Frågan är nu om den här relationen kan betecknas med -ST? Ickereflexivitet och symmetri är klart på grund av diagrammets utseende (vi saknar $c\mathcal{R}c$ som krävs för reflexivitet och symmetri ges av att relationen är sin egen spegelbild i diagonalen.) Men gäller alltid implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

för alla möjliga tilldelningar av x, y, z? Svaret är JA och vi kan inse det genom att först konstatera att inga c någonsin är relaterade till några andra element och inga element är någonsin relaterade till c. Det betyder att så fort x eller y eller z är lika med c så blir förledet i implikationen ovan falskt, det vill säga implikationen blir sann. Det betyder att vi bara behöver undersöka de kombinationer av tilldelningar till x, y, z i implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

där x, y, z är något av a, b. Om vi under dessa förutsättningar studerar diagrammet så ser vi att det *alltid* gäller att yz just eftersom *alla* fyra kryss är ifyllda, vi har alltså $a\mathcal{R}a$, $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}a$ och $b\mathcal{R}b$. Så efterledet i implikationen är alltid sant vilket ger att implikationen också alltid är sann vilket visa att diagrammet som vi just valt kan betecknas med -ST.

Vi ska nu slutligen studera diagrammet som är betecknat med --. Det ser ut så här:

--	a	b	c
a	x	x	
b		x	
c			

Samma fråga ställs nu om denna relation. Är den transitiv eller icke-transitiv? Samma argument som ovan (om att c inte är relaterat till något element och att inga element är relaterade till c) gör att vi bara behöver undersöka situationen då x, y, z väljs från $\{a, b\}$ när vi utreder om relationen är transitiv eller inte. Vi behöver undersöka de möjliga tilldelningarna av x, y, z som ger ett sant förled i implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\ddagger.$$

Här kan vi göra observationen att om x, y, z väljs från $\{a, b, c\}$ så måste någon av a, b vara vald två gånger. Om vi studerar de val som svarar mot att vi har *precis* en av a, b vald två gånger så svarar det mot de sex tilldelningarna

$$x = a, y = a, z = b, \qquad x = a, y = b, z = a, \qquad x = b, y = a, z = a$$
$$x = b, y = b, z = a, \qquad x = b, y = a, z = b, \qquad x = a, y = b, z = b$$

men av dessa svarar bara

$$x = a, y = a, z = b \qquad \text{och} \qquad x = a, y = b, z = b$$

mot sanna förled i implikationen. Och eftersom dessa två val också ger sanna efterled i implikationen (eftersom $a\mathcal{R}b$) måste relationen som är betecknad med `--` ovan även vara transitiv och den kan alltså betecknas med `--T`. Slutligen ska vi nu förstöra transitiviteten i den relationen och efter lite funderande kan vi komma fram till att om vi adderar ett kryss så att $b\mathcal{R}c$ så har vi en diagrammet

`--`	a	b	c
a	x	x	
b		x	x
c			

som definierar en relation som har $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$, men *inte* $a\mathcal{R}c$ vilket visar att den inte är transitiv, den relationen kan alltså betecknas med `--T`.

Sammanfattning:

`RST`	a	b	c
a	x		
b		x	
c			x

`R-T`	a	b	c
a	x	x	
b		x	
c			x

`-S-`	a	b	c
a	x	x	
b	x		
c			

`--T`	a	b	c
a	x	x	
b		x	
c			

`RS-`	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	x
c		x	x

`R--`	a	b	c
a	x	x	
b		x	x
c			x

`-ST`	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	
c			

`---`	a	b	c
a	x	x	
b		x	x
c			