Föreläsning 33 i ADK

Repetition av kursen
Kursens betygssystem
Återstående examination

Viggo Kann

KTH

Cykelbudets problem

- Cykelbudfirman Cybud får varje dag en mängd brev som ska levereras till olika adresser i stan
- Cykelbudet Bud vill planera sin cykelrutt så att den tar så kort tid som möjligt
- Hur ska han göra?

Modellera problemet

Cykelbudets problem

Indata:

- $n-1$ stycken platser (adresser) $p_1, \ldots, p_{n-1}$ samt budfirmans bas p_0
- Tid att ta sig från p_i till p_j: $t(p_i, p_j)$

Lösning:

- Cykelrutt som utgår från p_0 och passerar alla platser $p_1, \ldots, p_{n-1}$ så snabbt som möjligt
- d.v.s. permutation $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ som minimerar:

$$t(p_0, p_{\pi_1}) + \sum_{i=1}^{n-2} t(p_{\pi_i}, p_{\pi_{i+1}}) + t(p_{\pi_{n-1}}, p_0)$$

Går det att lösa optimalt?

Nej, inte i polynomisk tid om inte $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ eftersom TSP är NP-fullständigt

Vad gör man då?

1. Hitta approximationsalgoritm
2. Hitta heuristik
3. Hitta exakt algoritm för små indata
4. Förenkla problemet genom att utnyttja egenskaper hos det praktiska problemet, ta reda på om det förenklade problemet är NP-svårt och börja om från 1

Kan TSP approximeras inom en konstant?

Nej! Vi har visat att TSP $\notin$ APX

- Anta motsatsen, d.v.s. att TSP kan approximeras inom f
- Reduktion från hamiltonsk cykel:

function $\textsc{HamiltonianCycle}(G = \langle V, E \rangle)$
  $n \leftarrow |V|$
  for $(v_i, v_j) \in E$ **do**
    $t(p_i, p_j) \leftarrow 1$
    $t(p_j, p_i) \leftarrow 1$
  for $(v_i, v_j) \notin E$ **do**
    $t(p_i, p_j) \leftarrow |V| \cdot f$
  if $\textsc{TSPApprox}(\{p_i\}, t) \leqslant |V| \cdot f$ **then**
    return true
  else return false

- Om $\textsc{TSPApprox}$ kan approximera TSP inom faktorn f så avgör ovanstående algoritm ifall det finns en hamiltonsk cykel i G, vilket är NP-fullständigt. Motsägelse!

Algoritm som löser TSP exakt

Använd dynamisk programmering:

- Låt ℓ_i^S vara längden av kortaste stigen från p_0 till p_i som på vägen passerar p_j för alla $j \in S$
- $\mathrm{OPT} = \min_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} \left(\ell_i^{\{1,\ldots,n-1\}-\{i\}} + t(p_i, p_0) \right)$
- $\ell_i^{\emptyset} = t(p_0, p_i)$
- $\ell_j^S = \min_{i \in S} \left(\ell_i^{S-\{i\}} + t(p_i, p_j) \right)$
- Beräkna nu ℓ_j^S för större och större delmängder S av $\{1, \ldots, n-1\}$
- Beräkna sedan OPT ur formeln ovan.

Tid: $\mathcal{O}(n^2 \cdot 2^n)$

Utnyttja egenskaper hos problemet

Budfirman ligger på Manhattan!

- $\Rightarrow p_i = (a_i, g_i)$ och $t(p_i, p_j) = |a_i - a_j| + |g_i - g_j|$
- Mycket enkel metrik! (Rektilinjär- eller Manhattanmetrik)

Fortfarande NP-fullständigt?

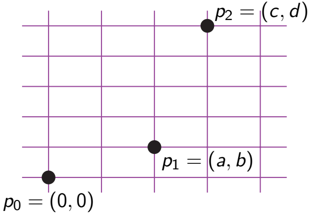
- Slå upp i litteraturen:

  [Garey & Johnson: Computers and intractability] Problem ND23

  "... remains $\mathcal{NP}$-complete if the distance is replaced by the L_1 "Rectilinear" metric [Garey, Graham, Johnson 76]"
- Attans!

Kan det förenklade problemet approximeras?

- Slå upp i Viggos lista med approximationsresultat `https://www.people.kth.se/~viggo/problemlist/`
  "TSP med triangelolikhet kan approximeras inom $\frac{3}{2}$ med Christofides algoritm"
- Kolla om triangelolikheten är uppfylld:



  - Visa $t(p_0, p_2) \leqslant t(p_0, p_1) + t(p_1, p_2)$
  - $|c| + |d| \leqslant |a| + |b| + |c - a| + |d - b|$
  - $\left.\begin{array}{l} c \geqslant a \geqslant 0 \\ d \geqslant b \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad c + d \leqslant a + b + c - a + d - b = c + d$
  - OK!

Kan vi göra ännu bättre än Christofides?

- Christofides algoritm garanterar en lösning som är högst 50% längre än den optimala.
- På föreläsning 31 presenterades olika TSP-heuristiker.
- Låt oss köra både Christofides och ett antal heuristiker
- Välj den bästa lösningen av alla dessa algoritmer