

Föreläsning 31 i ADK

Mer approximationsalgoritmer

Viggo Kann

KTH

Problemklasser för approximation

- **NPO** = {Optimeringsproblem i $\mathcal{NP}$ }

Exempel:

- TSP
- Max klick
- Min mängdtäckning

- **APX** = {Problem som kan approximeras inom någon konstant}

Exempel:

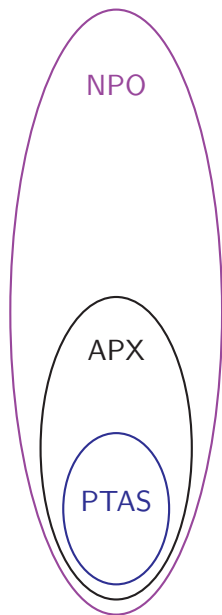
- Min hörntäckning
- TSP med triangelolikhet
- MAX 3CNFSAT

- **PTAS** = {Problem som kan approximeras inom varje konstant $1 + \varepsilon$ }

Exempel:

- Max delmängdsumma
- TSP i planet

PTAS=Polynomial Time Approximation Scheme



Christofides algorithm

För approximation av TSP med triangelolikhet inom $\frac{3}{2}$

Indata: Komplett graf $G = \langle V, E \rangle$ med kantvikter som uppfyller triangelolikheten

Algorithm:

- $E_T \leftarrow$ Minimalt spännande träd för G
- $V' \leftarrow \{\text{Hörn i } V \text{ med udda gradtal i trädet } E_T\}$
- $E_M \leftarrow$ Minimal matchning i $G|_{V'}$, d.v.s. grafen inducerad av V'
- Konstruera eulercykel i $E_T \cup E_M$ (går bra eftersom varje hörn har jämt gradtal)
- Gör om eulerska turen till en TSP-tur genom att snedda förbi hörn som redan besökts tidigare i turen

Tidskomplexitet:

- Låt $n = |V|$. Då är $|E| \in \Theta(n^2)$
- $\mathcal{O}(n^2 \log n + n + n^4 + n^2 + n^2) = \mathcal{O}(n^4)$
 - $\mathcal{O}(n^2 \log n)$: Spännande träd (Prims algoritim)
 - $\mathcal{O}(n)$: hörn med udda gradtal
 - $\mathcal{O}(n^4)$: minimal matchning
 - $\mathcal{O}(n^2)$: eulersk tur
 - $\mathcal{O}(n^2)$: sneddning

Analys av Christofides

- Vi vill visa att $\|\text{producerad tur}\| < \frac{3}{2}\text{OPT}$

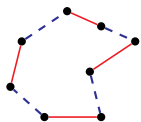
$\|\bullet\|$ betyder längden av $\bullet$

- Observera att $\|\text{MST}(G)\| < \text{OPT}$

$$\|\text{producerad tur}\| < \|\text{eulertur}\| = \underbrace{\|\text{MST}(G)\|}_{< \text{OPT}} + \underbrace{\|E_M\|}_{\substack{\text{Måste visas} \\ \text{vara} \leq \frac{\text{OPT}}{2}}}$$

- Betrakta grafen $G|_{V'}$, dvs grafen inducerad av V'

$\|\text{Minimal TSP}(G|_{V'})\| \leq \text{OPT}$ eftersom $V' \subseteq V$



Varje TSP-tur genom jämt antal hörn definierar två matchningar M_1 och M_2

$$\|M_1\| + \|M_2\| = \|\text{Minimal TSP}(G|_{V'})\|$$

- E_M är minimal matchning för $G|_{V'}$ så $\|E_M\| \leq \|M_1\|$ och $\|E_M\| \leq \|M_2\|$
- $\Rightarrow 2\|E_M\| \leq \|M_1\| + \|M_2\| = \|\text{Minimal TSP}(G|_{V'})\| \leq \text{OPT}$
- $\|\text{producerad tur}\| \leq \|\text{MST}(G)\| + \|E_M\| < \text{OPT} + \frac{\text{OPT}}{2} = \frac{3}{2}\text{OPT}$

Approximation av TSP

Visa att TSP $\notin$ APX, d.v.s. att det inte kan approximeras

- Anta motsatsen, d.v.s. att TSP kan approximeras inom f
- Reduktion från hamiltonsk cykel:

function HAMILTONIANCYCLE($G = \langle V, E \rangle$)

$n \leftarrow |V|$

for $(v_i, v_j) \in E$ **do**

$t(p_i, p_j) \leftarrow 1$

$t(p_j, p_i) \leftarrow 1$

for $(v_i, v_j) \notin E$ **do**

$t(p_i, p_j) \leftarrow |V| \cdot f$

if TSPAPPROX($\{p_i\}, t$) $\leq |V| \cdot f$ **then**

return true

else return false

- Om TSPAPPROX kan approximera TSP inom faktorn f så avgör ovanstående algoritm ifall det finns en hamiltonsk cykel i G , vilket är NP-fullständigt. Motsägelse!

- Visa övre och undre gränser som är så nära varandra som möjligt för olika problem
- Förklara varför NP-fullständiga problem beter sig olika vid approximation – hitta problemegenskaper som förklarar approximationsegenskaperna

Lista med de bästa approximationsgränserna för optimeringsproblem:
<https://www.people.kth.se/~viggo/problemelist/>