

Föreläsning 30 i ADK

Approximationeralgoritmer

Viggo Kann

KTH

Om man **måste** lösa ett NP-fullständigt problem, vad gör man då?

- ① Begränsa problemet - vissa typer av indata kanske är enklare
- ② Lös bara för små indata med en exponentiell algoritm
- ③ Om optimeringsproblem: Använd en **approximationssalgoritm** som garanterat ger en lösning som är nära den optimala
- ④ Om optimeringsproblem: Använd en **heuristik** som ger en lösning som förhoppningsvis är bra (se föreläsning 29)
- ⑤ Kombinera 1 med 2, 3 eller 4

Approximerbarhet

- NP-fullständiga problem kan (nog) inte lösas i polynomisk tid
- Många NP-fullständiga problem är egentligen optimeringsproblem
- Kan man i polynomisk tid approximera ett optimeringsproblem, d.v.s. hitta en lösning som säkert är nära den optimala lösningen?
- Svar: Ja, för vissa problem, men inte för alla

Exempel: Minimal hörntäckning

Approximationsalgoritm:

$S \leftarrow \emptyset$

while $E \neq \emptyset$ **do**

Plocka kant $\langle v_1, v_2 \rangle$ från E

$S \leftarrow S \cup \{v_1, v_2\}$

Plocka bort alla kanter i E som har ändpunkt i v_1 eller v_2

return S

Analys av approximationsalgoritmen

Tidskomplexitet:

- Varje kant i E behandlas bara en gång, inget annat arbete görs.
- $\Rightarrow \mathcal{O}(|E|)$

Korrekthet:

- Lösningen S är en hörntäckning av grafen ty varje kant i grafen plockas bort från E och en kant plockas bara bort då minst en av dess ändpunkter stoppats in i S

Analys av approximationsalgoritmen

Approximation:

- Den funna lösningen innehåller högst dubbelt så många hörn som den optimala lösningen, ty:

$$\text{OPT}_G \geq \text{OPT}_M = \frac{1}{2} \cdot \text{APPROX}$$

- OPT_G = Antalet hörn i den optimala lösningen av ursprungsproblem
- OPT_M = Antalet hörn i den optimala lösningen på den delgraf som bara består av de plockade kanterna i grafen
- APPROX = Antalet hörn i lösningen som approximationsalgoritmen returnerar

Mått på approximerbarhet

Approximationkvoten för en algoritm är

- $\frac{\text{APPROX}}{\text{OPT}}$ för minimeringsproblem
- $\frac{\text{OPT}}{\text{APPROX}}$ för maximeringsproblem

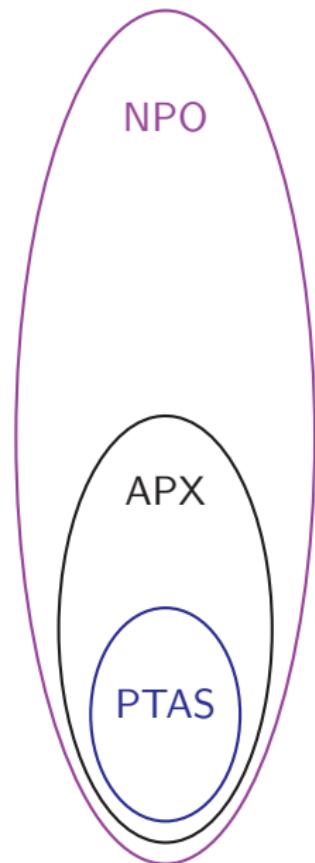
Approximationkvoten är alltid ≥ 1

Exempel: Approximationsalgoritmen för minimal hörntäckning har approximationkvoten 2

- Algoritmen approximerar minimal hörntäckning inom faktorn 2
- Problemet minimal hörntäckning kan approximeras inom faktorn 2

Problemklasser för approximation

- **NPO** = {Optimizeringsproblem i \mathcal{NP} }
- Exempel:
- TSP
 - Max klick
 - Min mängdtäckning
- **APX** = {Problem som kan approximeras inom någon konstant}
- Exempel:
- Min hörntäckning
 - TSP med triangololikhet
 - MAX 3CNFSAT
- **PTAS** = {Problem som kan approximeras inom varje konstant $1 + \varepsilon$ }
- Exempel:
- Max delmängdsumma
 - TSP i planet



PTAS=Polynomial Time Approximation Scheme