Föreläsning 30 i ADK

Approximationsalgoritmer

Viggo Kann

KTH

Om man **måste** lösa ett NP-fullständigt problem, vad gör man då?

1. Begränsa problemet - vissa typer av indata kanske är enklare
2. Lös bara för små indata med en exponentiell algoritm
3. Om optimeringsproblem: Använd en **approximationsalgoritm** som garanterat ger en lösning som är nära den optimala
4. Om optimeringsproblem: Använd en **heuristik** som ger en lösning som förhoppningsvis är bra (se föreläsning 29)
5. Kombinera 1 med 2, 3 eller 4

Approximerbarhet

- NP-fullständiga problem kan (nog) inte lösas i polynomisk tid
- Många NP-fullständiga problem är egentligen optimeringsproblem
- Kan man i polynomisk tid approximera ett optimeringsproblem, d.v.s. hitta en lösning som säkert är nära den optimala lösningen?
- Svar: Ja, för vissa problem, men inte för alla

Exempel: Minimal hörntäckning

Approximationsalgoritm:

$S \leftarrow \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
  Plocka kant $\langle v_1, v_2 \rangle$ från E
  $S \leftarrow S \cup \{v_1, v_2\}$
  Plocka bort alla kanter i E som har ändpunkt i v_1 eller v_2
return S

Analys av approximationsalgoritmen

Tidskomplexitet:

- Varje kant i E behandlas bara en gång, inget annat arbete görs.
- $\Rightarrow \mathcal{O}(|E|)$

Korrekthet:

- Lösningen S är en hörntäckning av grafen ty varje kant i grafen plockas bort från E och en kant plockas bara bort då minst en av dess ändpunkter stoppats in i S

Analys av approximationsalgoritmen

Approximation:

- Den funna lösningen innehåller högst dubbelt så många hörn som den optimala lösningen, ty:

$$\mathrm{OPT}_G \geqslant \mathrm{OPT}_M = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{APPROX}$$

- $\mathrm{OPT}_G =$ Antalet hörn i den optimala lösningen av ursprungsproblemet
- $\mathrm{OPT}_M =$ Antalet hörn i den optimala lösningen på den delgraf som bara består av de plockade kanterna i grafen
- $\mathrm{APPROX} =$ Antalet hörn i lösningen som approximationsalgoritmen returnerar

Mått på approximerbarhet

Approximationskvoten för en algoritm är

- $\dfrac{\text{APPROX}}{\text{OPT}}$ för minimeringsproblem
- $\dfrac{\text{OPT}}{\text{APPROX}}$ för maximeringsproblem

Approximationskvoten är alltid $\geqslant 1$

Exempel: Approximationsalgoritmen för minimal hörntäckning har approximationskvoten 2

- Algoritmen approximerar minimal hörntäckning inom faktorn 2
- Problemet minimal hörntäckning kan approximeras inom faktorn 2

Problemklasser för approximation

- **NPO** $= \{$Optimeringsproblem i $\mathcal{NP}\}$
  Exempel:
  - TSP
  - Max klick
  - Min mängdtäckning
- **APX** $= \{$Problem som kan approximeras inom någon konstant$\}$
  Exempel:
  - Min hörntäckning
  - TSP med triangelolikhet
  - MAX 3CNFSAT
- **PTAS** $= \{$Problem som kan approximeras inom varje konstant $1 + \varepsilon\}$
  Exempel:
  - Max delmängdsumma
  - TSP i planet

PTAS=Polynomal Time Approximation Scheme