Föreläsning 3 i ADK

Datastrukturer

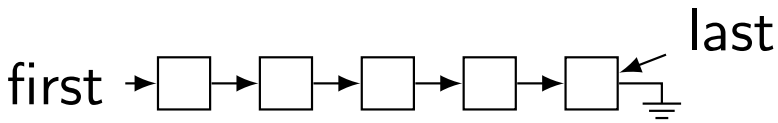
Viggo Kann

KTH

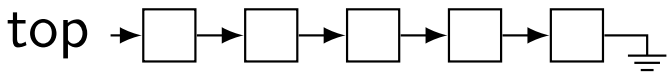
Översikt över kända datastrukturer

Linjära strukturer:

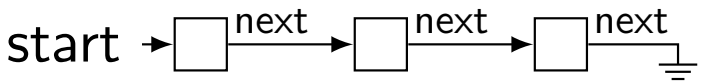
- Kö:



- Stack:



- Lista:

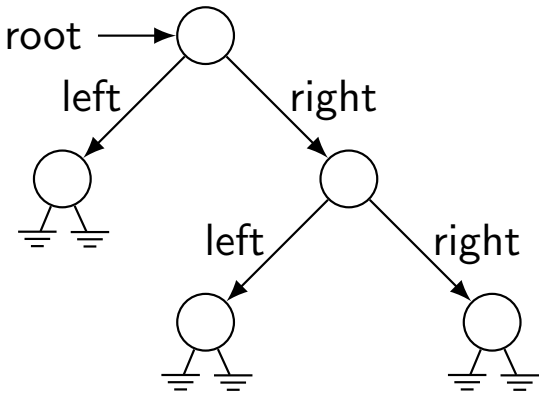


- Array/vektor:

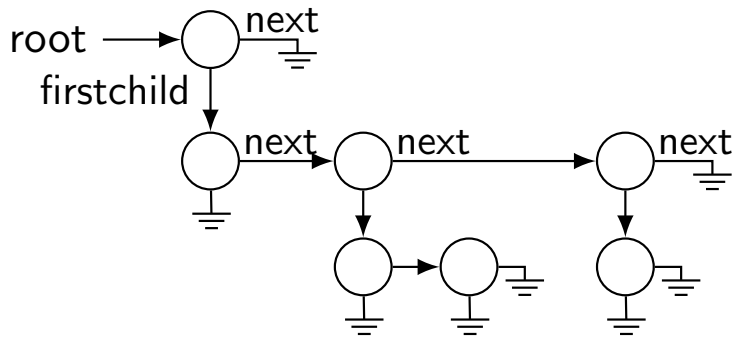
Översikt över kända datastrukturer

Träd och grafer:

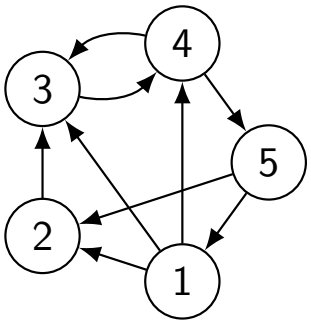
Binärt träd:



Allmänt träd:



Riktad graf:



Representerad som grannmatris:

	1	2	3	4	5
1		1	1	1	
2			1		
3				1	
4				1	1
5	1	1			

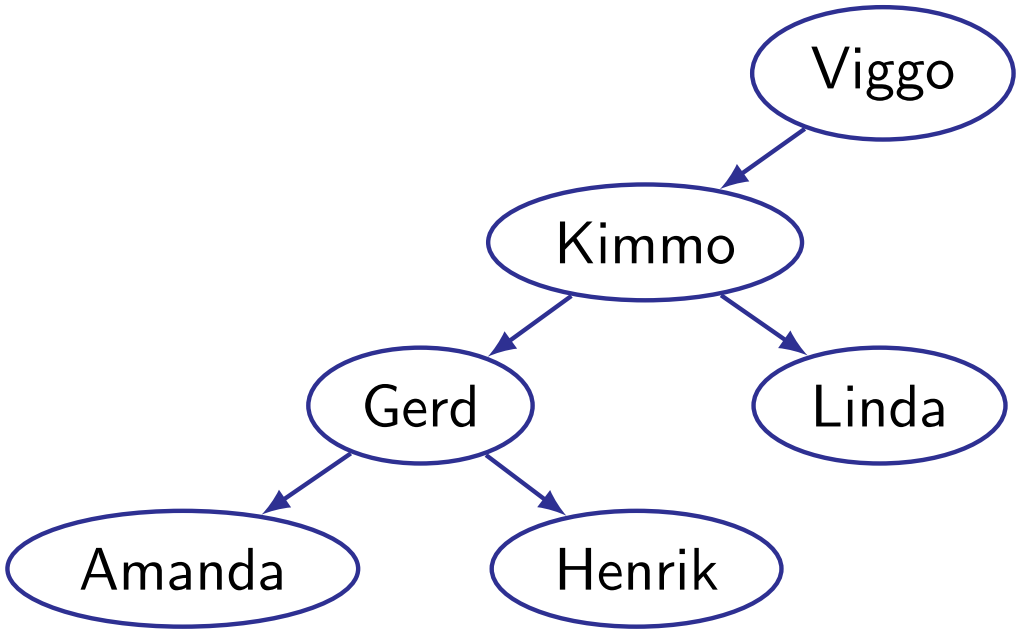
Representerad som kantmatris:

1	-1		-1			-1		1
2	1	-1					1	
3		1	1	-1	1			
4				1	-1	1	-1	
5							1	-1	-1

Binära sökträd

Ett träd som är sorterat så att mindre element är till vänster kallas **sökträd**.

Exempel:



Binära sökträd

Sök efter ett värde x i ett sökträd:

```
function TreeSearch(root, x)
    if root = nil then return nil
    if root.key > x then
        return TreeSearch(root.left, x)
    if root.key < x then
        return TreeSearch(root.right, x)
    return root
```

PRE: `root` är rot till ett sökträd

POST: (x finns i trädet $\Rightarrow$ x-nod i trädet returneras) $\wedge$
(x finns inte i trädet $\Rightarrow$ **nil** returneras)

Korrekthetsbevis görs med induktion över trädstrukturen (varje delträd är ett sökträd)

Balanserade träd

Problem med binära sökträd:

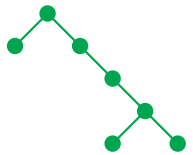
- Obalanserade träd tar tid att söka i.

Dålig lösning:

- Balansera trädet, tar tid $\mathcal{O}(n)$.

Bättre lösning:

- Håll trädet balanserat efter varje insättning.



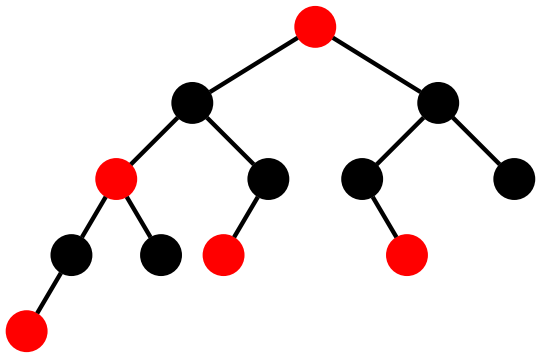
Balanserade träd

Bättre lösning:

- Håll trädet balanserat efter varje insättning.

Rödsvarta träd realiserar detta genom att vidmakthålla följande tre egenskaper:

1. Varje trädnod är antingen röd eller svart
2. En röd nod kan inte ha ett rött barn.
3. I varje stig från en nod till vilket löv som helst under noden finns det lika många svarta noder.



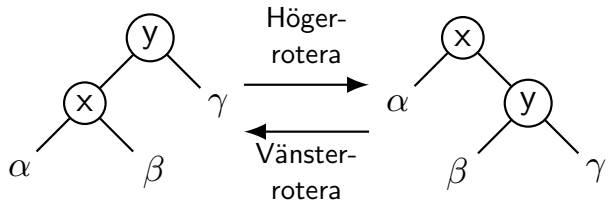
Rödsvarta träd

Sökning

- Använd vanlig trädsökningsalgoritm som tar tid $\mathcal{O}(\text{träddjupet})$
- Största träddjupet i ett rödsvart träd begränsas av $2\log_2 n \Rightarrow$ söktid $\mathcal{O}(\log n)$

Insättning

- Sätt in elementet med vanlig trädinsättning som ett rödfärgat löv
- Om nya elementets förälder också var röd uppfylls inte egenskap 2, så då måste vi omforma trädet med hjälp av högst $\mathcal{O}(\log n)$ färgändringar och rotationer:



- Ger insättningstid $\mathcal{O}(\log n)$

Borttagning

- Ta bort noden och fixa till som ovan $\Rightarrow$ Tid $\mathcal{O}(\log n)$

Prioritetsköer

Datastruktur där varje post har en prioritet, dvs. ett tal som anger hur viktig posten är.

Operationer:

- **Insert**: Stoppar in en ny post i prioritetskön
- **Remove**: Plockar ut posten med högst prioritet ur kön och returnerar den

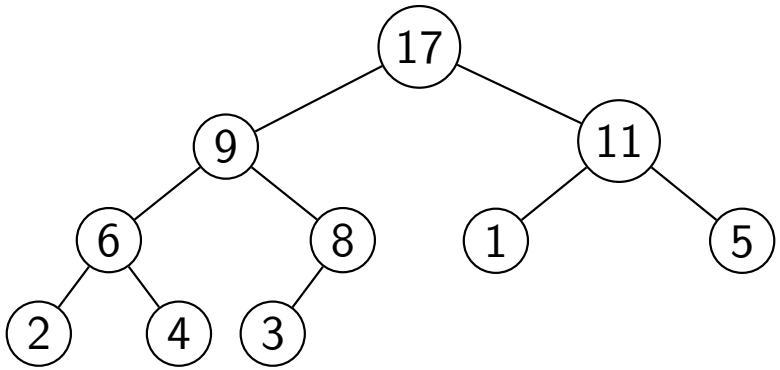
Exempel på användningsområden:

- Jobbhantering på fleranvändardatorer - Jobbet med högst prioritet ska köras först
- Simulering av händelser - Varje händelse ska inträffa vid en viss tidpunkt; händelserna ska bearbetas i tidsordning
- Sortering - Låt sorteringsnycklarna ange prioriteten
  1. Stoppa in alla poster som ska sorteras i prioritetskön
  2. Plocka ut en post i taget. Posterna kommer i omvänd sorteringsordning, dvs största först och minsta sist.

Heapar - snabb representation av prioritetsköer

- Komplett binärträd - alla nivåer i trädet är fyllda utom den sista. Den sista ska fyllas från vänster.
- Heapordning: Större element ovanpå mindre, dvs. varje nods barn är mindre än föräldern (eller lika stora).
- Största element finns därför alltid i roten.

Exempel på heap:



Heapar - snabb representation av prioritetsköer

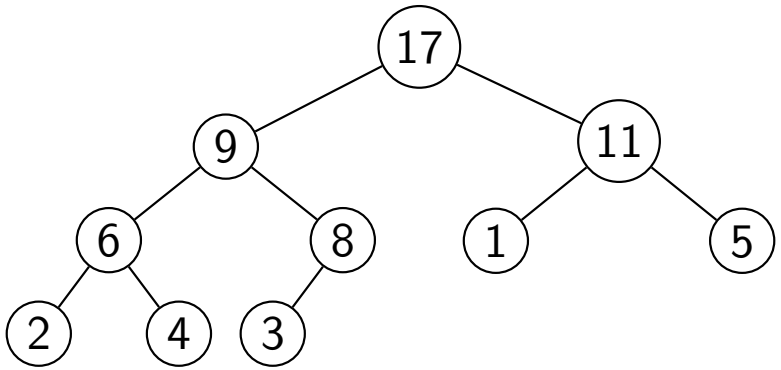
Effektiv lagring av komplett binärträd:

Lagra i array `A` så att

- Roten finns i `A[1]`
- Barnen till noden i `A[i]` finns i `A[2i]` och `A[2i+1]`

Exempel: Heapen nedan lagras som

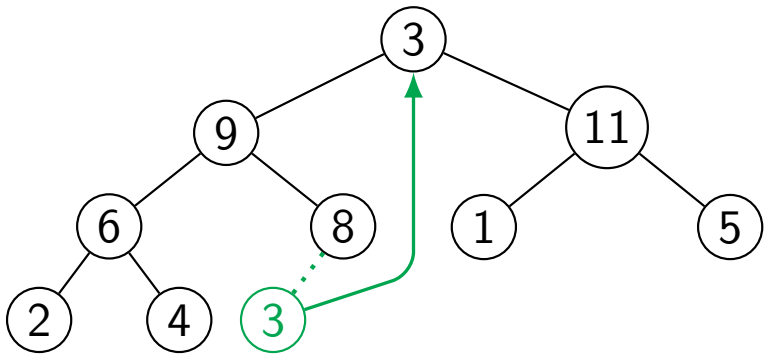
`A`:	17	9	11	6	8	1	5	2	4	3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Realisering av operationen Remove i en heap

Elementet som ska tas bort ligger i roten (`A[1]`).

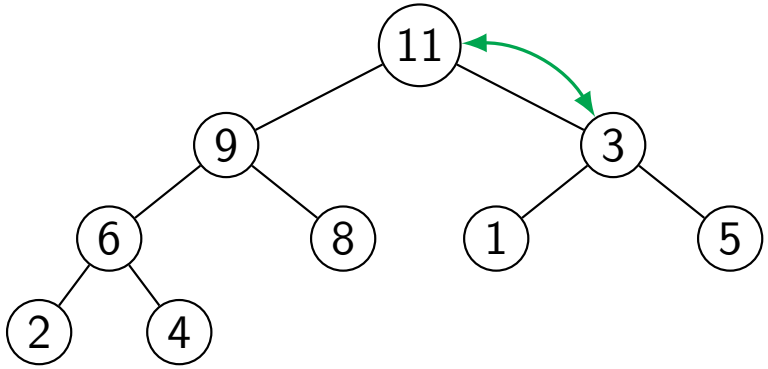
1. Spara undan elementet som ligger i roten.
2. Ta bort det sista elementet i heapen och lägg det i roten istället.



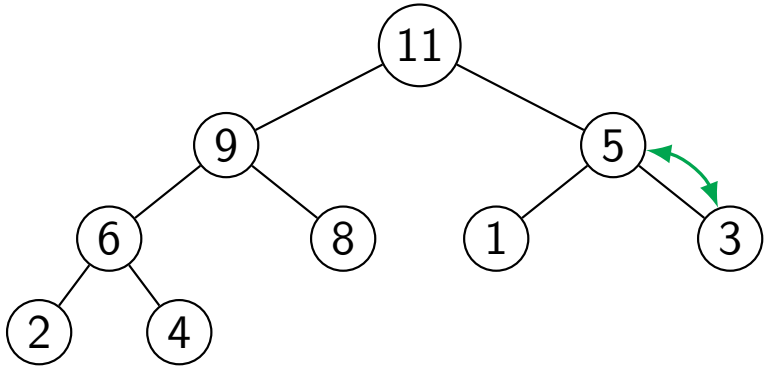
Realisering av operationen Remove i en heap

Steg 3 och 4 bildar tillsammans operationen Downheap

3. Är rotelementet mindre än den största av sina barn? Byt i så fall roten och största barnet.



4. Är elementet fortfarande mindre än den största av sina barn? Byt i så fall och gör om denna punkt.



5. Nu är heapen ordnad igen (tog tid $\mathcal{O}(\log n)$).

Förberäknad funktion

- Beräkna $f(x)$ för alla x och lagra som en array `f[x]`
- Varje anrop av f går sedan på konstant tid!

Exempel: Funktion $u2l(c)$ som översätter från stora bokstäver till små bokstäver (programkod i C)

Initiering:

```
unsigned char u2l[256], *s;
unsigned char *ALPHABET = "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZÅÄÖ";
int i;
for (i = 0; i < 256; i++) u2l[i] = i;
for (s = ALPHABET; *s; s++)
    u2l[*s] = *s + 'a' - 'A';
```

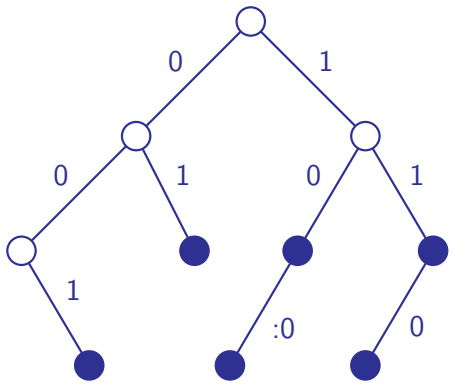
Användning av funktionen:

```
unsigned char *s;
for (s = word; *s; s++)
    *s = u2l[*s]; // detta måste vara unsigned char,
                  // för en char kan ha negativa värden
```

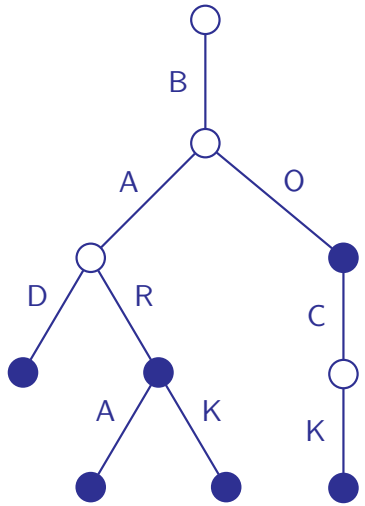
Trie

En trie är en implementation av en mängd av strängar som ett träd

Exempel på binär trie:
{001, 01, 10, 100, 11, 110}



Exempel på bokstavstrie (automat):
{BAD, BAR, BARA, BARK, BO, BOCK}



Svårt att lagra effektivt!

Latmanshashning

- Hasha bara på de tre första bokstäverna i söknyckeln. Använd sedan binärsökning
- Lämpligt för sökning med få diskaccesser i stor text när indexet inte kan ligga i primärminnet

Exempel: Indexera stort svensk-engelsk lexikon

Givet:

- Stor fil `L` med hela lexikontexten
- Index `I` där varje rad är: `<sökord> <position i L>`

Skapa sökindex:

- Sortera `I` med `sort`
- Skapa en indexarray `A[abc]` som för varje `abc` anger var i `I` första ordet som börjar så finns

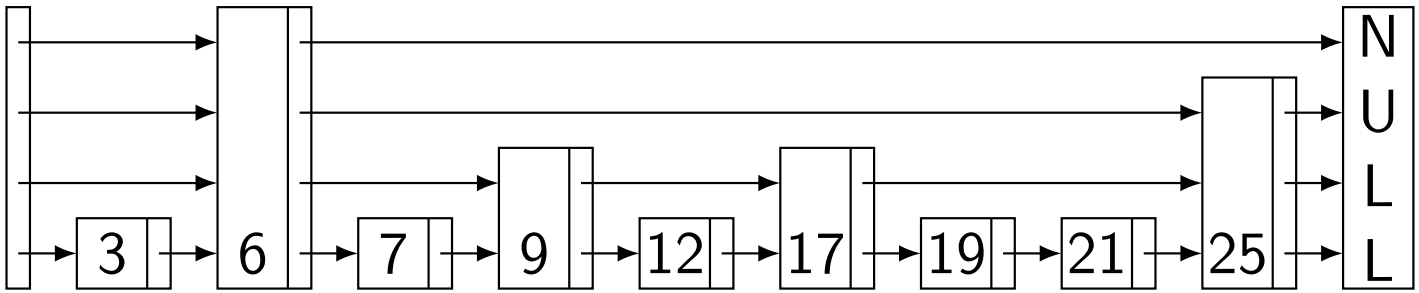
Förberedelse inför sökningar:

- Läs in `A` från fil
- Öppna filerna `I` och `L`

```
function SÖKNINGSALGORITM(w)
    wprefix ← första 3 bokstäverna i w
    i ← A[wprefix]
    j ← A[wprefix+1]
    while j-i > 1000 do
        m ← ⌊(i+j)/2⌋
        Gå till position m i I
        Läs in nästa ord från I till s
        if s ⩽ w then i ← m
        else j ← m
    Gå till position i i I
    while True do
        Läs in nästa ord från I till s
        if s = w then
            Läs in positionen till x
            return x
        if s > w then
            return notfound
```

Skipplistor

- Probabilistisk datastruktur
- Enkel att implementera
- I allmänhet lika snabb som balanserade träd att söka i och enklare att ändra på



Skipplistor

Programkodsexempel i C:

- En elementpost deklareras av typen:

```
struct skipnode {
    int key;
    struct skipnode *forward[1]; // olika många pekare
}                                // beroende på nivå
```

- Allokering av elementpost på nivå `k`:

```
struct skipnode *e = malloc(sizeof(*e) +
    (k-1)*sizeof(struct skipnode *));
```

Sökning i skipplistor

- Börja i startpostens högsta nivå
- Om forward-pekaren pekar på ett för stort element går vi ner en nivå, annars går vi framåt

```
function SEARCH(list, searchKey)
    x ← list.header
    for i ← list.level downto 1 do
        while x.forward[i].key < searchKey do
            x ← x.forward[i]
    x ← x.forward[1]
    if x.key = searchKey then
        return x
    else
        return notfound
```

Sökning i skipplistor

- Vid insättning och borttagning av element söker man på samma sätt, men håller reda på alla `x` i slutet av for-slingan.
- När man skapar ett nytt element slumpar man fram dess nivå:

```
function RandomLevel( )
    newLevel ← 1
    while Random( ) < p do
        newLevel ← newLevel + 1
    return min(newLevel, MAXLEVEL)
```

Analys av skipplistor

Antag att:

- $n =$ antal element i datastrukturen
- $p =$ sannolikheten att ett element på nivå i också finns på nivå $i + 1$

Genomsnittligt antal pekare för ett element:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \text{antal element på nivå } k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} np^{k-1}}{n} = 1 + p + p^2 + \cdots = \frac{1}{1-p}$$

Analys av skipplistor

Nivå med bara $\frac{1}{p}$ element:

$$n \cdot p^{k-1} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow n = \left(\frac{1}{p}\right)^k \Leftrightarrow k = \log_{\frac{1}{p}} n$$

Låt $L(n) = \log_{\frac{1}{p}}(n)$

Förväntat antal jämförelser vid sökning:

- Vi mäter sökstigens längd bakifrån (från den funna posten åt vänster och uppåt till startposten)
- Vid varje rörelse åt vänster eller uppåt görs en jämförelse

Analys av sökstigens längd

- Låt $c(k) =$ förväntat längd på en sökstig som går upp k nivåer
- Rekursionsekvation: $\begin{cases} c(0) = 0 \\ c(k) = (1-p)(1+c(k)) + p(1+c(k-1)) \end{cases}$
- Där $1-p$ är sannolikheten att vi är kvar på samma nivå, och p att vi byter nivå
- $\Rightarrow p \cdot c(k) = 1 + p \cdot c(k-1) \Rightarrow c(k) = \frac{1}{p} + c(k-1) \Rightarrow c(k) = \frac{k}{p}$
- Längd av sökstig från nivå 1 till nivå $L(n)$ är $C(L(n)-1) = \frac{L(n)-1}{p}$
- På nivå $L(n)$ förväntas $\frac{1}{p}$ element
- Om vi startar på nivå $L(n)$ blir totala längden $\frac{L(n)-1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{L(n)}{p}$

Analys av sökstigens längd

Hur mycket längre blir stigen om vi börjar sökningen från översta nivån?

- $\Pr[\text{högsta nivån } > k] = 1 - \Pr[\text{högsta nivån } \leqslant k] =$
  $1 - (\Pr[\text{element } i \text{ har nivå} \leqslant k]) = 1 - (1 - p^k)^n \leqslant n \cdot p^k$
- Låt $X =$ antal nivåer över $L(n)$ som högsta nivån är, givet att vi har $\frac{1}{p}$ element på nivå $L(n)$.
- $E[X] = \frac{1}{p}(p^1 + p^2 + p^3 + \dots) = 1 + p + p^2 + \cdots = \frac{1}{1-p}$
- Total sökstigslängd: $\frac{L(n)}{p} + \frac{1}{1-p}$

Skipplistor i praktiken

Sökstigens längd om

- $p = \frac{1}{2}$: $2 \log_2 n + 2$
- $p = \frac{1}{4}$: $4 \log_4 n + \frac{4}{3} = \frac{4 \log_2 n}{\log_2 4} + \frac{4}{3} = 2 \log_2 n + \frac{4}{3}$

Antal pekare om

- $p = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
- $p = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$

Söktiden är ungefär lika för $p = \frac{1}{2}$ och $p = \frac{1}{4}$, minnesutrymmet är betydligt mindre för $p = \frac{1}{4}$, men söktidens varans ökar om $p = \frac{1}{4}$.

Skipplistor i praktiken

Jämförelse med implementation av balanserade träd:

- Söktiden för skipplista och balanserat träd är ungefär lika
- Insättnings- och borttagningstiden för balanserat träd är ungefär dubbelt så lång som för skipplista.

Implementation av skipplistor som du kan pröva:

- `/afs/nada.kth.se/info/adk20/skiplist`

Datastrukturskomplexitet

	Tid för uppslagning		Tid för insättning eller borttagning	
	Värsta fallet	Medel	Värsta fallet	Medel
Sorterad array				$\mathcal{O}(n)$
Binärt sökträd				$\mathcal{O}(\log n)$
Heap (bara största, alternativt minsta, hittas enkelt)				$\mathcal{O}(\log n)$
Hashtabell (nästa/föregående element kan inte hittas enkelt)				$\mathcal{O}(1)$
Rödsvart träd				$\mathcal{O}(\log n)$