

## NÅGOT OM GRÄNSVÄRDESBEGREPPET

### 1. GRÄNSVÄRDEN AV TALFÖLJDER

1.1. **Exempel på talföljder och deras gränsvärden.** En *talföljd* är en oändlig följd av tal, till exempel

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

där prickarna antyder följden fortsätter utan slut enligt samma mönster.

På ett mer precist och samtidigt mer kortfattat sätt kan samma talföljd skrivas som  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ , dvs

$$(1) \quad \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \stackrel{\text{betyder}}{=} \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Observera att vi använder samma symboler som för mängder,  $\{$  och  $\}$ , men till skillnad från mängder så ordningsföljden väsentlig när det gäller talföljder. Det får framgå av sammanhanget om vi tänker på mängder eller talföljder, det brukar inte vara något problem.

Andra exempel på talföljder är

$$(2) \quad \{n^2\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$$

$$(3) \quad \{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

$$(4) \quad \left\{\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \dots\right\}$$

Om vi tittar på talföljderna ovan ser vi att talföljden i följden (1) tycks närma sig 0 och talen i följden (4) tycks närma sig 1. Vi säger att dessa följder är *konvergenta*, att följden (1) har *gränsvärdet* 0 då  $n$  går mot oändligheten, och att följden (4) har gränsvärdet 1 då  $n$  går mot oändligheten, och skriver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{och} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1.$$

Talföljderna (2) och (3) däremot närmar sig inte något bestämt värde, vi säger att de är *divergenta* eller att de *saknar gränsvärden* när  $n$  går mot oändligheten.

Här följer ytterligare ett exempel på en konvergent talföljd: talföljden

$$(5) \quad \left\{ \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{10}, \dots \right\}$$

har gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} = 0$$

**1.2. Gränsvärdet av en talföljd — den precisa definitionen.** Vad menar vi när vi säger t ex att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1?$$

Visserligen är  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \neq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , men  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  kommer närmare och närmare 1 ju större  $n$  vi väljer. Vi kan i själva verket få uttrycket  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  att ligga så nära 1 som vi önskar genom att välja ett tillräckligt stora värden på  $n$ .

Att säga att värdet på  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  kan fås att ligga så nära 1 som vi önskar är det samma som att säga att

$$\text{”avståndet mellan } \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \text{ och } 1 \text{ kan fås godtyckligt litet”}$$

om  $n$  är tillräckligt stort.

Låt oss försöka uttrycka detta på ett mer precist sätt:

”Avståndet mellan  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  och 1” skriver vi som  $\left|\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1\right|$ .

”Kan fås godtyckligt litet” kan uttryckas mer precist som ”kan fås mindre än varje givet positivt tal ”eller ”mindre än varje litet  $\epsilon > 0$ ”.

Att det ”godyckligt lilla positiva talet” kallas  $\epsilon$  (”epsilon”; grekiskans motsvarighet till bokstaven ”e”) har historiska skäl. Tänk på talet som en ”felgräns” som ska underskridas, och fel heter på latin *errata* (jfr engelskans *error*), och betecknas därför naturligt med  $\epsilon$ .

Frasen ”Påståendet är sant för  $n$  tillräckligt stort” kan mer precist uttryckas som ”det finns något tal  $N$  så att påståendet är sant för alla  $n > N$ ”

Detta resonemang leder fram till den precisa definitionen

**Definition.** Talföljden  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  har gränsvärdet  $L$  när  $n$  går mot oändligheten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

om det till varje givet  $\epsilon > 0$  finns ett naturligt tal  $N = N(\epsilon)$  sådant att

$$n \geq N \implies |a_n - L| < \epsilon.$$

Vi visar nu att de gränsvärden vi tyckte oss se här ovan verkligen har dessa värden enligt den givna definitionen.

**Exempel.** Vi visar att först att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$$

Låt  $\epsilon > 0$  var ett givet (litet) tal. Vi ska visa att vi kan hitta ett (stort) heltal  $N = N(\epsilon)$  sådant

$$(6) \quad \left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \epsilon$$

för alla  $n \geq N(\epsilon)$ .

Vi undersöker nu villkoret (6).

$$\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \epsilon \iff \left| 1 - \frac{1}{3^n} - 1 \right| < \epsilon \iff \left| \frac{1}{3^n} \right| < \epsilon \iff 3^n > \frac{1}{\epsilon} \iff n > \log_3 \frac{1}{\epsilon}.$$

Låt nu  $N = N(\epsilon)$  vara ett heltal sådant att  $N \geq \log_3 \frac{1}{\epsilon}$ . Då gäller att, givet ett godtyckligt  $\epsilon > 0$ , så är villkoret (6) uppfyllt om  $n \geq N \geq \log_3 \frac{1}{\epsilon}$ . Vi har visat att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$ .

**Exempel.** Som andra exempel visar vi att talföljden (5) ovan har gränsvärdet 0. Vi ska visa att

$$(7) \quad \left| \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

för varje givet  $\epsilon > 0$ , om bara  $n$  är större än eller lika med något lämpligt tal  $N(\epsilon)$ .

Vi ser att

$$\left| \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right| = \frac{|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)|}{|n|} = \frac{|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)|}{n} \leq \frac{1}{n},$$

där den sista olikheten följer av att  $-1 \leq \cos v \leq 1$  för alla  $v \in \mathbb{R}$ .

Från detta ser vi att, givet  $\epsilon > 0$ , räcker det att välja  $N(\epsilon)$  som ett tal sådant att  $N(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$ , ty då gäller att om  $n \geq N(\epsilon)$  så är

$$\left| \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\epsilon)} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Alltså är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} = 0.$$

Observera att

- det inte finns någonting i gränsvärdesdefinitionen som förbjuder att ett eller flera tal i talföljden är lika med följdens gränsvärde. I talföljden (6) till exempel är ju vart annat tal lika med följdens gränsvärde 0. Eller betrakta följderna  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  där  $a_n = 1$  för alla  $n$ , dvs

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, \dots\}$$

för vilken gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- det inte finns någonting i gränsvärdesdefinitionen som kräver att talen i talföljden ska komma närmare gränsvärdet i varje steg, det enda som krävs är att följderna för varje avstånd  $\epsilon > 0$  förr eller senare håller sig inom ett  $\epsilon$ -avstånd från gränsvärdet. Följden (6) är ett exempel också på detta.
- det inte finns någonting i gränsvärdesdefinitionen som kräver att följderna ska närma sig gränsvärdet ifrån bara ett håll, se återigen talföljden (6) för ett exempel på en följd som "zick-zackar" in mot gränsvärdet.

## 2. SERIER OCH DERAS GRÄNSVÄRDE - ETT EXEMPEL

En *serie* är en summa med oändligt många termer. Det kan låta som ett meningslöst begrepp (man kan ju aldrig lägga ihop oändligt många termer, hur länge man än håller på!), men det finns sätt att göra detta meningsfullt. Här följer ett exempel.

**Exempel.** Betrakta serien

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Låt  $S_n$  var summan av de  $n$  första termerna (den så kallade  $n$ :te *partialsumman*)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}.$$

Vi känner igen  $S_n$  som en geometrisk summa med första term 1 och kvot  $\frac{1}{3}$ , och kan beräkna

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right).$$

Vi vet att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) = 1$ , dvs att uttrycket  $\left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$  antar värden godtyckligt nära 1 om vi väljer  $n$  tillräckligt stort. Av det följer att

$$\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

antar värden godtyckligt nära  $\frac{3}{2}$  för tillräckligt stora tal  $n$ , dvs att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}.$$

Vi definierar summan av serien  $S$  som gränsvärdet av partialsummor när antalet termer  $n$  går mot oändligheten

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}.$$

Vi säger att serien  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$  är *konvergent* med gränsvärdet  $\frac{2}{3}$ , eller, att serien  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$  har summa  $\frac{2}{3}$ .

En serie kallas *divergent* om talföljden bestående av dess partialsummor är en divergent talföljd.

### 3. GRÄNSVÄRDET AV FUNKTIONER $f(x)$ NÄR $x \rightarrow \infty$ , $x \in \mathbb{R}$

Om  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  är en funktion definierad på ett reellt intervall  $I$  av typ  $I = (a, \infty)$  kan vi fråga oss om  $f(x)$  närmar sig något speciellt värde då  $x$  blir större och större utan begränsning, det vill säga om  $f(x)$  har något gränsvärde då  $x \rightarrow \infty$ . Detta påminner mycket om gränsvärden av talföljder  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  när  $n \rightarrow \infty$ , skillnaden är den att i fallet för en funktion  $f(x)$  som ovan tänks  $x$  löpa kontinuerligt längs reella axeln och vi måste ta hänsyn till alla funktionsvärden som då dyker upp, medan vi i fallet med en talföljd  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  endast behöver ta hänsyn till uttrycket  $a_n$ :s värden för heltal  $n$ .

**Definition.**  $f : I = (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sägs ha har gränsvärdet  $L$  när  $x$  går mot oändligheten,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

om det till varje givet  $\epsilon > 0$  finns ett reellt tal  $R = R(\epsilon)$  sådant att

$$x > R \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Vi säger då också att linjen  $y = L$  är en *horisontell asymptot* till grafen  $y = f(x)$ .

**Exempel.** Visa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Bestäm också det minsta tal  $r$  som är sådant

$$x > r \implies |f(x)| < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

Vi har att

$$\left| \frac{1}{x^3} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x^3} \right| = \frac{1}{x^3},$$

där den sista likheten gäller om  $x > 0$ , speciellt gäller den då  $x \rightarrow \infty$ .

Låt nu  $\epsilon > 0$  vara ett givet litet positivt tal. Vi vill hitta tal  $R$  sådant att om  $x > R$  så är avståndet mellan  $\frac{1}{x^3}$  och 0 säkert mindre än det givna talet  $\epsilon$ :

$$\left| \frac{1}{x^3} - 0 \right| = \frac{1}{x^3} < \epsilon \iff x^3 > \frac{1}{\epsilon} \iff x > \frac{1}{\epsilon^{1/3}}.$$

Givet  $\epsilon > 0$  kan vi alltså välja  $R = R(\epsilon) = \epsilon^{-1/3}$  för att uppfylla att

$$x > R \implies |(f(x) - L)| < \epsilon,$$

alltså är  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$ , och linjen  $y = 0$  är en horisontell asymptot till grafen  $y = \frac{1}{x^3}$ .

Vi ser speciellt att

$$\frac{1}{x^3} < \frac{1}{1\,000\,000} \iff x^3 > 1\,000\,000 \iff x > 100.$$

**Exempel.** Funktionen  $y = \cos x$  saknar gränsvärde då  $x \rightarrow \infty$ . Eftersom  $y = \cos x$  är periodisk och oscillerar mellan  $+1$  och  $-1$  på varje intervall av längd  $2\pi$ , så kan  $f(x)$  inte närma sig något bestämt värde  $L$  när  $x \rightarrow \infty$ . Vi visar nu detta intuitivt uppenbara påstående med hjälp av gränsvärdesdefinitionen.

Antag att gränsvärdet existerar och att  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ . Där ska vi för varje  $\epsilon > 0$  kunna hitta ett  $R(\epsilon)$  sådant  $|\cos x - L| < \epsilon$  för alla  $x \in (R(\epsilon), \infty)$ .

Tag t ex  $\epsilon = 1/2$  och antag att vi har funnit motsvarande  $R(1/2)$ . Då ska gälla att för  $x \in (R(1/2), \infty)$  att

$$|\cos x - L| < 1/2$$

Men låt nu  $N$  vara ett naturligt tal så stort  $2\pi N > R(1/2)$ , då är också  $\pi + 2\pi N > R(1/2)$ , och vi skulle ha att

$$\begin{cases} |\cos(2\pi N) - L| = |1 - L| < 1/2 \\ |\cos(\pi + 2\pi N) - L| = |-1 - L| < 1/2 \end{cases},$$

vilket är orimligt, inget tal  $L$  kan ha avstånd mindre än en  $1/2$  till både  $-1$  och  $+1$ .

**Definition.** Vi säger att grafen  $y = f(x)$  har en *sned asymptot*  $y = kx + m$  då  $x \rightarrow \infty$  om  $f(x)$  är definierad på interval av typ  $(a, \infty)$  och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - (kx + m)| = 0.$$

Informellt uttryckt betyder detta att grafen  $y = f(x)$  närmar sig den räta linjen  $y = kx + m$  mer och mer ju större  $x$  blir. Specialfallet  $k = 0$  ger oss en horisontell asymptot.

**Exempel** Visa att den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1}$$

har en sned asymptot då  $x \rightarrow \infty$ . Bestäm denna sneda asymptot.

Polynomdivision ger att

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \quad (\text{kontrollera detta!}).$$

Termen  $\frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0$  när  $x \rightarrow \infty$ , så följaktligen gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - (2x - 3)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \left( 2x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) - (2x - 3) \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| = 0$$

Alltså är linjen  $y = 2x - 3$  en sned asymptot till kurvan  $y = f(x)$  när  $x \rightarrow \infty$ .

I själva verket gäller för rationella funktioner  $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , där  $P$  och  $Q$  är polynom, att

- $F$  har en horisontell asymptot om  $\text{grad}(P) = \text{grad}(Q)$ ;

- $F$  har en sned, icke-horisontell, asymptot om  $\text{grad}(P) = \text{grad}(Q) + 1$ ;

Vi avslutar detta avsnitt med att nämna att man kan på ett helt likartat sätt definiera gränsvärden och asymptoter när  $x \rightarrow -\infty$ .

#### 4. GRÄNSVÄRDET AV FUNKTIONER $f(x)$ NÄR $x \rightarrow a$ , $x \in \mathbb{R}$

Det finns också ett behov att tala om gränsvärden av funktioner  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , när  $x$  närmar sig ett speciellt värde.

**Exempel.** Hur ser grafen ut till funktionen  $y = \frac{\sin x}{x}$  när  $x$  är nära 0? Uppenbarligen är funktionen inte definierad för just  $x = 0$ , vi får ett meningslöst uttryck med 0 i nämnaren när  $x = 0$ , men för alla andra  $x$  är funktionen definierad, och vi kan fråga oss vad som händer med funtionsvärdet när  $x$  närmar sig 0, vi studerar då gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

**Exempel.** Derivatans  $f'(x_0)$  av en funktion  $f(x)$  i en punkt  $x = x_0$  definieras som

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \{\text{som genom att sätta } h = x - x_0 \text{ kan skrivas}\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Till exempel definieras derivatan av  $g(x) = x^3$  i punkten  $x = 2$  av

$$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

Att sätt in  $x = 2$  ger det meningslösa uttrycket  $\frac{0}{0}$ , vi måste verkligen undersöka vad som händer när  $x$  närmar sig 2.

För just de gränsvärden som kommer från derivator av våra vanligaste funktioner, så har man gjort de undersökningarna en gång för alla, och härlett de derivierungsregler vi använder oss av, som att i detta fall är  $g'(x_0) = 3x_0^2$  för alla  $x_0$ , så  $g'(2) = 12$ , men det bygger på att man har bevisat det allmänna resultatet

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2.$$

För att definiera gränsvärden av denna typ använder man sig av en idé som liknar den som används för att definiera gränsvärden när  $x \rightarrow \infty$ . Vi kräver även i detta fall att  $f(x)$  ska hålla sig inom ett godtyckligt lite avstånd  $\epsilon$  från det tänkta gränsvärdet, men nu för alla  $x$  som ligger tillräckligt nära  $x_0$  (istället för, som tidigare, för alla tillräckligt stora  $x$ ). Ett mer precis sätt att säga "för alla  $x$  som ligger tillräckligt nära  $x_0$ " är att säga "för alla  $x$  som ligger på avstånd mindre  $\delta$  från  $x_0$ " där  $\delta > 0$  är ett lämpligt litet positivt tal.

**Definition.** Vi säger att funktion  $f(x)$  har gränsvärdet  $L$  då  $x$  går mot  $x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

om det för varje  $\epsilon > 0$  finns ett  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  sådant att

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Att vi väljer just den grekiska bokstaven  $\delta$ , som motsvarar vår bokstav  $d$ , har historiska skäl och beror förmodligen på att man tänker att  $\delta$  betecknar en "avståndsbegränsning" (jfr t ex engelskans "distance"). I enlighet med detta, och om vi tänker på  $\epsilon$  som "felgräns", skulle vi kunna formulera gränsvärdes definitionen som

Funktion  $y = f(x)$  har gränsvärdet  $L$  då  $x$  går mot  $x_0$ , om vi till varje **felgräns** i  $y$ -led kan hitta ett **avstånd** i  $x$ -led sådant att om  $x$  ligger inom detta **avstånd** från  $x_0$ ,  $x \neq x_0$ , så ligger säkert  $f(x)$  inom denna **felgräns** från  $L$ .

Observera att gränsvärdesdefinitionen inte tar hänsyn till funktionens värde i punkten  $x_0$ , vi kräver bara  $|f(x) - L| < \epsilon$  för alla  $x$  sådana att  $|x - x_0| < \delta$  och  $|x - x_0| > 0$ . Det vill säga, gränsvärdet säger ingenting om funktionsvärdet  $f(x_0)$ , funktionen är ju ofta inte ens definierad i  $x_0$ . Om funktionen  $f$  är definierad i  $x_0$  och gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  sågs  $f$  vara *kontinuerlig* i punkten  $x_0$ .

**Exempel.** Funktionen  $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  är definierad för alla  $x \neq 0$ . Funktionen är inte definierad för  $x = 0$ , men vi kan studera gränsvärdet när  $x \rightarrow 0$  och visa att

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Tag ett  $\epsilon > 0$ . Vi ska visa att funktionsvärdet  $h(x)$  håller sig inom ett  $\epsilon$ -avstånd från  $y = 0$  för alla  $x$  som ligger inom ett lämpligt  $\delta$ -avstånd från  $x = 0$ . Vi har att

$$|h(x) - 0| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

eftersom  $|\sin t| \leq 1$  för alla  $t$ .

Så givet ett  $\epsilon > 0$  kan vi ta till exempel  $\delta = \delta(\epsilon) = \epsilon$ . Då gäller att

$$0 < |x - 0| < \delta = \epsilon \implies |h(x) - 0| \leq |x| < \epsilon.$$

Vi har visat att  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ .

Nyckeln till beviset är olikheten  $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$ . Vi kan visualisera detta med att grafen  $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  är instängd mellan de två graferna  $y = |x|$  och  $y = -|x|$ .

**Exempel.** Vi härleder derivatan  $g'(2)$  till funktionen  $g(x) = x^3$ .

$$\begin{aligned} g'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^3 + 3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2h^2 + h^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2h + h^2) = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) \end{aligned}$$

För att visa att  $g'(2) = 12$  måste vi nu visa att det sista uttrycket  $12 + 6h + h^2$  kan fås godtyckligt nära 12 genom att välja  $h$  tillräckligt litet. Det är intuitivt uppenbart, och när



man genomför detta resonmang i senare kurser gör man det i sammanhang där man redan kan stödja sig på andra resultat som också gör det mycket enkelt att visa. Men man kan också visa detta direkt ifrån gränsvärdesdefinitionen:

Vi måste visa att det till varje  $\epsilon > 0$  finns ett  $\delta = \delta(\epsilon)$  sådant om  $|h| < \delta$  så är  $|(12 + 6h + h^2) - 12| < \epsilon$ . Om  $\epsilon \leq 7$  går det bra att ta  $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{7}$ . Vi får nämligen då att  $0 < |h| < \frac{\epsilon}{7}$  implicerar att

$$|(12 + 6h + h^2) - 12| = |6h + h^2| \leq |6h + |h|| \leq |6h| + |h| \leq 7|h| < \epsilon$$

där vi har utnyttjat triangelolikheten och att  $h^2 \leq |h|$  eftersom  $|h| \leq \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{7} \leq 1$  då  $\epsilon \leq 7$ .

Observera att det alltid räcker med att visa att gränsvärdesdefinitionen är uppfylld för tillräckligt små värden på  $\epsilon > 0$ ; i fallet närmast ovan till exempel behöver vi inte bekymra oss om att vi antog att  $\epsilon \leq 7$ ; om vi till exempel skulle vilja finna ett värde på  $\delta$  som garanterar  $|(12 + 6h + h^2) - 12| < 8$ , kan vi ju till exempel  $\delta = \delta(7) = 1$  som kommer att garantera att  $|(12 + 6h + h^2) - 12| < 7 < 8$  för alla  $h$  sådan att  $0 < h < 1$ .

## 5. UPPGIFTER

Alla nedanstående uppgifter ska lösas med hjälp av relevant gränsvärdesdefinition.

**Notation.** En variabel  $n$  förutsätts i dessa uppgifter alltid vara en helstalsvariabel, medan en variabel  $x$  alltid är en reell variabel.

1. Visa att talföljden  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  har gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. (a) Bestäm gränsvärdet  $L$ ,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{4n^2 + 3}.$$

Visa att gränsvärdet  $L$  verkligen är det som du påstår.

- (b) Finn ett så litet heltal  $N$  som du kan som är sådant  $n \geq N \implies \left| \frac{2n^2+1}{4n^2+3} - L \right| < \frac{1}{100}$ .

3. Visa att om  $-1 < q < 1$  så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

Ge också exempel med numeriska värden på  $a$  och  $q$ .

4. Visa att  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ .

**5. Bestäm gränsvärdet**

$$\lim_{x \rightarrow} \frac{10x^2 + 15x + \sin x + \cos 2x}{x^2 + 2x}$$

och använd relevant gränsvärdesdefinition för att verifiera ditt påstående.

**6.** Till en funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , kan man associera en talföljd  $\{F_n\}_{n=0}^\infty$  genom att sätta  $F_n = f(n)$ .

(a) Ge exempel på en funktion  $f$  sådan att  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  inte existerar, medan däremot  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  existerar, eller förklara varför detta inte är möjligt.

(b) Ge exempel på en funktion  $f$  sådan att  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  inte existerar, medan däremot  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existerar, eller förklara varför detta inte är möjligt.

**7.** Bestäm talen  $a$  och  $b$  sådan att linjen  $y = ax + b$  blir en sned asymptot till kurvan  $y = \frac{2x^2+3}{2}$ .

Bestäm sedan det minsta tal  $A$  som är sådant att vi kan approximera  $f(x) = \frac{2x^2+3}{2}$  med den linjära funktionen  $l(x) = ax + b$  med approximationsfel mindre än  $1/100$  för alla  $x \geq A$ .

**8. Funktionen**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

är definierad för alla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

**9.** Använd derivtans definition och relevant gränsvärdesdefinition för att bestämma och verifiera  $f'(-2) = -32$  om  $f(x) = x^4 + 1$ .