

**Definition 1.** En *funktion*  $f : S \rightarrow T$  är en regel som till varje element  $x \in S$  associerar precis ett element  $y = f(x) \in T$ . Mängden  $S$  utgör funktionens *definitionsområde* och betecknas också  $D_f$ . Mängden  $T$  kallas för funktionens *målmängd* (den mängd funktionen "siktat på").

På sidan 153 i läroboken *Introduktion till högre studier i matematik* ges en annan definition av vad en funktion är. Den definitionen är ofullständig som den står, en bättre formulering är

En **funktion**  $f$  från mängden  $A$  till mängden  $B$  är en delmängd av den kartesiska produkten  $A \times B$ , som uppfyller att

- (1) för varje  $a \in A$  finns ett element  $(a, b) \in f$ ;
- (2) om både  $(a, b_1) \in f$  och  $(a, b_2) \in f$  så gäller att  $b_1 = b_2$ .

En alternativ formulering vore också

En **funktion**  $f$  från mängden  $A$  till mängden  $B$  är en delmängd av den kartesiska produkten  $A \times B$ , som uppfyller att för varje  $a \in A$  finns precis ett element  $(a, b) \in f$ ;

Övertyga dig själv om att Definition 1 ovan och lärobokens definition i korrigerad form är ekvivalenta.

**Exempel 1.** Låt  $f$  vara den vanliga sinusfunktionen  $f(x) = \sin x$ . Eftersom den är definierad för alla reella tal är  $D_f = \mathbb{R}$ . Målmängden kan också tas som hela reella axeln  $\mathbb{R}$ , eftersom  $\sin x$  är ett reellt tal för varje reellt värde på  $x$ . Vi skriver detta som att  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Vi hade också kunnat ha en mindre målmängd, eftersom  $\sin x$  bara antar värden i intervallet  $[-1, 1]$ .

För att komma bort från otydligheten med begreppet målmängd inför vi begreppet *värdemängden* till  $f$ ,  $V_f$ , som är den delmängd av målmängden,  $V_f \subset T$ , som består av precis de  $y \in T$  som "träffas" av något  $x$  när  $f$  "skjuter iväg"  $x \in D_f$  till  $f(x) \in T$ .

**Definition 2.** Värdemängden  $V_f$  till en funktion  $f : S \rightarrow T$  är den delmängd av målmängden  $T$  som ges av

$$V_f = \{y \in T : y = f(x) \text{ för något } x \in S = D_f\}.$$

För funktionen i Exempel 1 är alltså  $V_f = [-1, 1]$ .

Att man ändå behåller begreppet målmängd beror bland annat på att det ibland är svårt att precisera precis vilken värdemängden är.

**Exempel 2.** Låt  $S = \{0, 1, 2, 3\}$  och låt  $T = \{a, b, c, d\}$ . Vi definierar  $f : S \rightarrow T$  genom

$$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c, f(3) = a.$$

$S = \{0, 1, 2, 3\}$  är då definitionsmängd,  $T = \{a, b, c, d\}$  är målmängd och  $V_f = \{a, b, c\}$  är värdemängd ( $d \neq f(x)$  för alla  $x$  i  $D_f$ ).

I definitionen av begreppet funktion ingår att varje  $x$  ska avbildas på ett och endast ett funktionsvärde  $y$ , det vill säga, det gäller alltid att

$$f(a) \neq f(b) \implies a \neq b.$$

Omvändningen gäller inte alls alltid, tänk till exempel på funktionen  $f(x) = x^2$ . Om omvändningen faktiskt gäller för en viss funktion är det en viktig egenskap hos funktionen.

**Definition 3.** En funktion  $f : S \rightarrow T$  sägs vara *injektiv* (eng. *injective*, *one-to-one*) om olika element i definitionsmängden  $D_f = S$  avbildas på olika element i värdemängden  $V_f \subset T$ , det vill säga om

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b), \forall a, b \in D_f.$$

Vi säger i detta fall också att funktionen  $f$  är en *injektion*.

Ett annat viktigt begrepp ges av följande definition:

**Definition 4.** En funktion  $f : S \rightarrow T$  sägs vara *surjektiv* (eng. *onto*, *surjective*) om varje element i målmängden  $T$  är bilden av något element i definitionsmängden  $D_f = S$ , det vill säga om

$$\forall y \in T, \exists x \in S : y = f(x).$$

Med andra ord är en funktion surjektiv precis när  $T = V_f$ , det vill säga när målmängd och värdemängd sammanfaller.

Vi säger i detta fall också att funktionen  $f$  är en *surjektion*.

**Definition 5.** En funktion som är både injektiv och surjektiv sägs vara *bijektiv* (eng. *bijective*); funktionen kallas i detta fall också för en *bijektion*.

**Exempel 3.** Låt  $X = \{\text{Studenter registrerade på CLGYM åk 1 höstterminen 2020}\}$ , låt  $Y = \mathbb{N}$ , de naturliga talen och definiera

$$f : X \rightarrow Y, \quad y = f(x) = \text{"}x\text{'s tiosiffriga personnummer"}.$$

Denna funktion är injektiv (eftersom alla har olika personnummer) men inte surjektiv (eftersom det finns naturliga tal som inte är någons personnummer). Värdemängden består av de tio-siffriga tal som är någon students personnummer.

**Exempel 4.** Funktionen i Exempel 2 är inte injektiv ty  $f(0) = c = f(3)$ . Den är inte heller surjektiv eftersom  $f(x) \neq d$  för alla  $x \in D_f$ .

**Exempel 5.** Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $y = \sin x$  är surjektiv, eftersom varje tal i intervallet  $[-1, 1]$  är sinusvärdet för någon vinkel  $x$ , men den är inte injektiv eftersom som till exempel  $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4}$ .

**Exempel 6.** Låt  $q : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  ges av  $q(x) = x^2$ . Denna funktion  $q$  är inte injektiv eftersom  $q(-a) = q(a)$ , men däremot är  $q$  surjektiv eftersom det till varje  $y \in Y = [0, \infty]$  finns minst ett  $x \in X = \mathbb{R}$  sådant att  $y = q(x) = x^2$ , till exempel  $x = \sqrt{y}$  (eller  $x = -\sqrt{y}$ ).

**Exempel 7.** Funktionen  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = h(x) = 2x$ , är både

- injektiv, eftersom om  $a \neq b$  så är också  $2a \neq 2b$ , och
- surjektiv, eftersom till varje  $y$  i målmängden finns ett  $x$  i definitionsmängden sådant  $y = 2x$ , och
- därmed också bijektiv.

Observera att om vi ändrar definitionsmängd eller målmängden så betraktar vi det som en ny funktion, även om den ges av samma regel eller formel. Vi kan till exempel göra om funktionen  $f$  i Exempel 3 till en surjektiv funktion  $g$  genom att helt enkelt definiera om målmängden till att bestå av precis värdemängden,  $g : X \rightarrow V_g$ ,  $y =$  "x:s tiosiffriga personnummer", där

$$V_g = \{\text{Förekommande personnummer i CLGYM åk 1 höstern 2015}\}.$$

Alla funktioner kan på detta sätt definieras om så att de blir surjektiva genom att välja "rätt" målmängd (= värdemängden).

Vi kan också göra om funktionen  $q$  i Exempel 6 till en injektiv funktion  $p$  genom att inskränka definitionsmängden,

$$p : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], \quad p(x) = x^2.$$

Funktionen  $p$  är också surjektiv och därmed alltså bijektiv.

Vi har tidigare i kursen talat om mängders kardinalitet. Vi sa då lite informellt att två mängder har samma kardinalitet om elementen i mängderna kan paras ihop så att inget element blev över. För ändliga mängder betydde det precis att de hade lika många element. Med de begrepp vi nu har kan vi mer precist formulera definitionen på följande sätt.

**Definition 6.** Två mängder  $S$  och  $T$  har samma kardinalitet om det finns en bijektiv funktion  $f : S \rightarrow T$ .

**Exempel 8.** Den bijektiva funktionen  $g : \mathbb{N} \rightarrow \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$  som ges av  $g(n) = 2n$  visar att mängden av de jämna naturliga talen har samma kardinalitet som hela  $\mathbb{N}$ . Det klassiska beviset för att de rationella talen  $\mathbb{Q}$  också har samma kardinalitet som  $\mathbb{N}$ , utgörs som vi nu kan se av att konstruera en bijektiv funktion mellan mängderna — varje tal i  $\mathbb{Q}$  tilldelas precis ett naturligt tal.

## Inverterbara funktioner och deras inverser

En bijektiv funktion  $f : S \rightarrow T$  parar ihop elementen i  $S$  och  $T$  parvis, så att varje element i den ena mängden kopplas ihop med precis ett element i den andra mängden. Mer precist har vi att

- (1) till varje  $x \in S$  finns precis ett  $y \in T$  sådant att  $y = f(x)$  ( $f$  är en funktion);
- (2) till varje  $y \in T$  finns precis ett  $x \in S$  sådant  $y = f(x)$  ( $f$  är bijektiv), ty
  - (a) till varje  $y \in T$  finns minst ett  $x \in S$  sådant  $y = f(x)$  ( $f$  är surjektiv);
  - (b) till varje  $y \in T$  finns högst ett  $x \in S$  sådant  $y = f(x)$  ( $f$  är injektiv);

**Exempel 9** Vi modifierar nu funktionen i Exempel 2 till en funktion  $g : S = \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow T = \{a, b, c, d\}$  som är bijektiv,

$$g(0) = a, g(1) = b, g(2) = c, g(3) = d.$$

Vi kan beskriva  $g$  med hjälp av diagrammet

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{g} & a \\ 1 & \xrightarrow{g} & b \\ 2 & \xrightarrow{g} & c \\ 3 & \xrightarrow{g} & d \end{array}$$

Att  $g$  är injektiv betyder att inget element i  $T = \{a, b, c, d\}$  har mer än en pil som pekar på sig. Att  $g$  är surjektiv betyder att varje element i  $T = \{a, b, c, d\}$  har minst en pil som pekar på sig. Att  $g$  är bijektiv innebär att bägge dessa villkor är uppfyllda, dvs att det pekar precis en pil på varje element i  $T$ . Att det utgår precis en pil från varje element i  $S$  följer redan av att  $g$  är en funktion.

Vi kan nu vända på pilarna och få en ny funktion  $h$  som går åt andra hållet,  $h : T \rightarrow S$ .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xleftrightarrow[h]{g} & a \\ 1 & \xleftrightarrow[h]{g} & b \\ 2 & \xleftrightarrow[h]{g} & c \\ 3 & \xleftrightarrow[h]{g} & d \end{array}$$

Eftersom  $g$  var surjektiv blir inget element i  $T$  utan pil, det vill säga  $h$  är definierad för alla  $y \in T$ ; eftersom  $g$  är injektiv startar det precis en pil i varje element i  $T$ , så  $h$  är en regel som associerar precis ett funktionsvärde till varje element i  $T$ . Observera att  $g$  och  $h$  "tar ut" varandra, till exempel  $h(g(1)) = 1$  och  $g(h(b)) = b$ , och motsvarande för övriga par av element.

**Definition 7.** En funktion  $f : S \rightarrow T$  kallas *inverterbar* om man kan "vända på pilarna" på detta sätt, mer precist om det finns en funktion  $h : T \rightarrow S$  sådan att

$$h(f(x)) = x, \forall x \in S \quad \text{och} \quad f(h(y)) = y, \forall y \in T.$$

$h$  kallas  $f$ :s invers, och betecknas vanligen  $h = f^{-1}$ , och  $f$  är då också  $h$ :s invers,  $f = h^{-1}$ .

En funktion är bijektiv om och endast om den är inverterbar. Sambanden mellan en bijektiv funktion  $f : S \rightarrow T$  och dess invers  $f^{-1} : T \rightarrow S$  kan också skrivas.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Det följer också direkt att  $D_{f^{-1}} = V_f$  och att  $V_{f^{-1}} = D_f$ .

**Exempel 10.** Funktionen  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = h(x) = 2x$  i Exempel 7, såg vi var bijektiv och därmed inverterbar. Vi kan bestämma dess invers genom att lösa ut  $x = \frac{y}{2}$ , så  $h^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ .

Genom att byta namn på variablerna kan vi skriva  $y = h^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ .

För att visa en att en funktion är inverterbar ska vi alltså visa att den är bijektiv. Ett något mer kompakt sätt att visa det på är att visa att ekvationen  $y = f(x)$  har en och endast en lösning  $x$  för varje  $y$  i målmängden. Lyckas vi lösa ut  $x$  entydig för ett godtycklig  $y$  i målmängden är funktionen inverterbar och vi har på köpet fått en formel för  $f^{-1}$ .

**Exempel 11.** Vi visar att  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y = 2x - 1$  är inverterbar och bestämmer den inversa funktionen  $f^{-1}$ .

$$y = f(x) = 2x - 1 \iff y + 1 = 2x \iff x = \frac{y + 1}{2} = f^{-1}(y).$$

Alltså är  $f^{-1}(y) = \frac{y + 1}{2}$ . Vi kan sedan byta namn på variabeln, så att vi som vanligt får  $x$  som oberoende variabel, och skriva  $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$ .

För funktioner  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  finns ett villkor som garanterar att funktionen är injektiv: Funktionen  $f$  sägs vara strikt växande om  $x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$  för alla  $x_1, x_2 \in D_f$  och  $f$  sägs vara strikt avtagande om  $x_1 > x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$  för alla  $x_1, x_2 \in D_f$ . Om  $f$  är strikt avtagande eller strikt växande följer att  $f$  är injektiv (varför då?). Så om  $f$  också är surjektiv, vilket vi alltid kan åstadkomma genom att inskränka målmängden, är  $f$  också inverterbar.

**Exempel 12.** Vi konstaterade tidigare att funktionen

$$p : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], \quad p(x) = x^2$$

är injektiv, men att injektiviteten går förlorad om vi utsträcker definitionsmängden till att omfatta negativa tal:  $[0, \infty]$  är det största intervall på vilket funktionsuttrycket  $x^2$  är växande.

Eftersom  $p$  också är surjektiv är  $p$  bijektiv och alltså inverterbar. Dess invers ges av  $y = \sqrt{x}$ .

**Exempel 13.** Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3$  är en strikt växande funktion och därmed bijektiv och alltså inverterbar. Dess invers ges av  $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ .