

KTH Matematik
Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om decimalbråksrepresentation av reella tal

Denna workshop syftar till att du ska förstå vad det innebär att skriva ett reellt tal i form av ett decimaltal, med eventuellt oändlig decimalbråksutveckling. Du kommer också att studera hur decimalbråksutvecklingar för rationella tal och irrationella tal skiljer sig åt.

Förberedande uppgifter - lös dessa innan workshopen

1. ÄNDLIGA DECIMALBRÅKSUTVECKLINGAR REPRÉSENTERAR RATIONELLA TAL

Uppgift 1. Förklara varför ett reellt tal som kan skrivas med *ändligt* många decimaler alltid är ett rationellt tal. Illustrera genom att skriva följande tal på formen $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

- (a) 512.43 (b) 0.3456 (c) 3.14 (d) -11.11

Observera också att den ändliga decimalutvecklingen anger talets position på tallinjen exakt. För att till exempel markera talet 1,34 behöver vi bara dela in sträckan mellan talen 1 och 2 i hundra lika stora delar, och sedan förflytta oss 34 sådana hundradelar till höger om 1.

Uppgift 2. Det finns som du säkert vet rationella tal som inte kan skrivas med ändligt många decimaler. Kanske kan du redan ett exempel på det?

Uppgift 3. Irrationella tal kan inte skrivas exakt med ändligt många decimaler, det följer av första uppgiften. Hur då? Förklara!

Vi kan sammanfatta det vi har kommit fram till så här långt på följande sätt.

Observation.

- *Det reella talet r har ändlig decimalbråksutveckling $\implies r$ är rationellt;*
- *Det finns också rationella tal med oändlig decimalbråksutveckling;*
- *Alla irrationella tal har oändlig decimalbråksutveckling.*

Uppgifter att arbeta med under workshopen

2. OÄNDLIGA DECIMALBRÅKSUTVECKLINGAR

Om alla reella tal ska kunna skrivas som decimalbråksutvecklingar tycks vi behöva kunna använda oss av oändliga decimalutvecklingar. Men vad ska vi mena det?

Exempel. Betrakta decimalbråksutvecklingen $t = 0.222\dots$ där punkterna skall antyda att det i själva verket är en oändlig rad med tvåor. Ett sätt tolka detta är som följer.

- Från de två första decimalerna utläser vi att $0.2 \leq t \leq 0.3$, dvs t ligger i intervallet I_1 med ändpunkter 0.2 och 0.3.
- Från de tre första decimalerna utläser vi att $0.22 \leq t \leq 0.23$, dvs t ligger i intervallet I_2 med ändpunkter 0.22 och 0.23.

Observera intervallet I_2 ligger inuti intervallet I_1 .

Uppgift 4. Fortsätt denna process i ytterligare två steg, dvs ange intervall I_3 och I_4 med rationella ändpunkter som innehåller t och som är sådana I_4 ligger i I_3 som i sin tur ligger i I_2 . Rita också en bild som illustrerar detta. (Ibland är det mer illustrativt att rita bilder som inte är skalenliga.)

Kommentar. Genom att fortsätta denna process kan vi med så stor noggrannhet vi önskar beskriva talet t 's läge på talaxeln. Observera att vi gör detta genom en följd av krympande slutna intervall I_k med rationella tal som ändpunkter,

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

Om vi fortsätter processen i oändlighet får vi talet t som det unika tal som ligger i alla intervallen I_k , $k = 1, 2, 3, \dots$. Vi kan formulera detta som att

$$\{t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Uppgift 5. Övertyga nu dig själv om att vi kan göra denna tolkning av *varje* oändlig decimalbråksutveckling. Exemplifiera genom att ange en följd av fem krympande intervall med rationella ändpunkter som succesivt ger alltmer precis information om var talet π ligger.

Uppgift 6. Talet $\sqrt{5}$ är ett irrationellt tal, det kan man visa med samma typ av bevis som visar att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Vi ska nu bestämma början av decimalbråksutvecklingen av $\sqrt{5}$. Först konstaterar vi att $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$ eftersom $4 \leq 5 \leq 9$.

- Visa nu att $2.2 \leq \sqrt{5} \leq 2.3$.

- Bestäm genom provning först ett intervall av längd $1/100$ som innehåller $\sqrt{5}$, och sedan ett av längd $1/1000$ och slutligen ett av längd $1/10000$. Intervallen ska ha rationella ändpunkter, och varje intervall ska vara innehållet i de tidigare.
Använd din räknare för beräkningarna (men använd inte $\sqrt{}$ -knappen!).
- Ange ett närmevärde till $\sqrt{5}$.

Genom att försätta processen kan vi bestämma $\sqrt{5}$ med önskad noggrannhet.

3. RATIONELLA TAL ÄR PRECIS DE TAL SOM HAR ÄNDLIG ELLER PERIODISK DECIMALUTVECKLING

Med *periodisk* utveckling menar vi att decimalutvecklingen efter ett tag består av en upprepning av en viss följd av decimaler, som t ex $0.333\dots$, $1.023777\dots$ (där vi tänker oss att resten av utvecklingen består av sjuor) eller $0.0236236236\dots$ (där sekvensen 236 upprepas i det oändliga).

Notation. Vi betecknar periodisk decimalutveckling med ett streck över de upprepande decimalerna, t ex är

$$0.\overline{3} = 0.333\dots, \quad \text{och} \quad 1.00\overline{345} = 1.00345345345\dots$$

Vi kan betrakta ändliga utvecklingar som periodiska genom att fylla på med en oändlig rad av nollor, t ex $0.57 = 0.57000\dots$.

Ni ska nu skissera beviset till följande sats.

Sats 1. *Rationella tal är precis de tal som har ändlig eller periodisk decimalutveckling.*

Detta kan också formuleras som

Sats 1'. *Irrationella tal är precis de tal som har oändlig icke-periodisk decimalutveckling.*

Observera hur logiken fungerar här.

- Låt R vara påståendet "talet r är rationellt" och låt P vara påståendet "talet r har ändlig eller periodisk decimalbråksutveckling".
- **Sats 1** kan då formuleras $P \iff R$.
- **Sats 1'** kan skrivas som $\neg P \iff \neg R$.
- Eftersom en utsaga av formen $P \iff R$ alltid är logiskt ekvivalent med utsagan av formen $\neg P \iff \neg R$, så räcker det att bevisa **Sats 1**.
- För att bevisa **Sats 1**, det vill säga påståendet $P \iff R$, bevisar vi de två implikationerna $P \implies R$ och $R \implies P$.

Uppgift 7. Visa först att varje rationellt tal har en periodisk decimalbråksutveckling ($R \implies P$):

- Bestäm decimalbråksutvecklingen av några rationella tal, t ex $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$ och $\frac{4}{7}$ genom utföra divisionerna för hand tills du ser mönstret i decimalutvecklingen. Förklara varför du kan vara säker på att mönstret kommer att upprepa sig.
- Förklara, utifrån de exempel du just genomfört, varför varje rationellt tal kommer att ha en periodisk decimalbråksutveckling.

Nästa steg blir att bevisa det omvända påståendet, dvs att varje periodisk decimalbråksutveckling representerar ett rationellt tal ($P \implies R$) Börja med att studera talet $r = 0.222\dots$. Om vi multiplicerar talet r med 10 får vi talet $10r = 2.222\dots$ och bildar vi sedan differensen $10r - r$ ser man att

$$10r - r = 2.222\dots - 0.222\dots \iff 9r = 2.000\dots \iff r = \frac{2}{9},$$

så r är ett rationellt tal, $r = \frac{2}{9}$.

Uppgift 8.

- Genomför samma typ av resonemang för talet $s = 1.\overline{34}$ genom att bilda differensen $100s - s$. (Varför använder vi faktorn 100 denna gång?)
- Förklara varför denna typ av resonemang kan genomföras för varje periodisk decimalbråksutveckling (vilket säger precis att $P \implies R$). Kan du formulera detta generellt på ett precist matematiskt språk?

4. KAN ETT TAL HA TVÅ OLIKA DECIMALBRÅKSUTVECKLINGAR?

Uppgift 9. Avgör om $0.999\dots$ och $1.000\dots$ är två olika tal eller i själva verket ett och samma tal skrivet på två olika sätt.

Kan du generalisera detta till andra par av decimalbråksutvecklingar?

5. EXTRA: ETT ANNAT SÄTT ATT SE ATT PERIODISKA
UTVECKLINGAR REPRÉSENTERAR RATIONELLA TAL

Detta avsnitt förutsätter att du är bekant med begreppet *konvergent geometrisk serie*, och att du vet att summan av en sådan serie ges av

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{om } |q| < 1.$$

Låt oss åter ta talet $\overline{0.2}$ som exempel.

Att decimalbråksutveckla ett tal är att uttrycka det i positionssystemet med bas tio, så per definition gäller att

$$\overline{0.2} = 0.222\ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{10} \right)^k.$$

Vi känner igen högerledet som en geometisk serie med första term $\frac{2}{10}$ och kvot $\frac{1}{10}$, vars summa vi kan beräkna till

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{10} \right)^k = \frac{2}{10} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}.$$

Så vi ser även på detta sätt att den periodiska decimalutvecklingen $0.222\ldots$ representerar ett rationellt tal.

Uppgift 10. Genomför samma typ av resonemang för talen $0.\overline{3}$ och $0.\overline{15}$.