

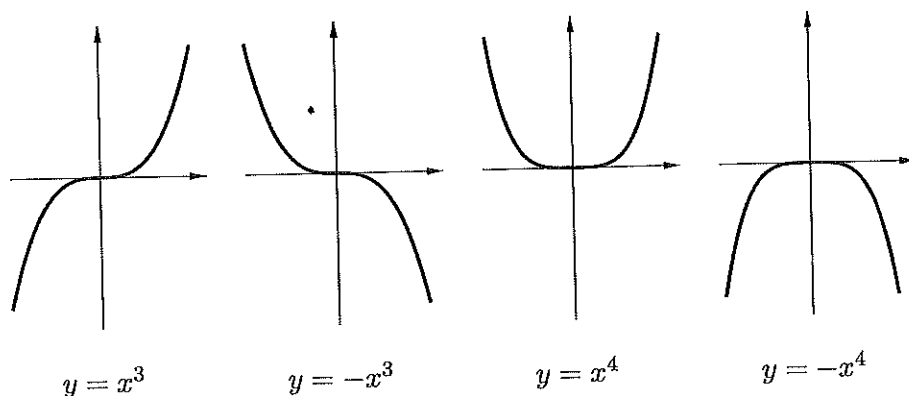
Man erhåller tydligen kurvan $y = f(x)$ utgående från kurvan $y = 4x^2$ genom att flytta den senare $\frac{3}{2}$ enheter åt höger och 4 enheter nedåt. $\square$

1.4.3 Allmän teori för polynom

Metoden med kvadratkomplettering reducerar i princip undersökningen av ett andragradspolynom till undersökning av monomet ax^2 . Monomen av högre grad

$$f(x) = ax^n$$

spelar inte samma huvudroll i teorin för n -tegradspolynom. Det finns nämligen ingen metod som i likhet med kvadratkomplettering för andragradspolynom återför undersökningen av ett polynom av högre grad än 2 på motsvarande monom. Graferna nedan ger därför ingen fullständig bild av hur en allmän tredje- eller fjärdegradskurva kan se ut. Polynom av högre grad än 2 måste behandlas med andra metoder.



Nollställen

Det är av speciellt intresse att finna *nollställena* till ett polynom $f(x)$, dvs. att finna *rötterna* (lösningarna) till ekvationen

$$f(x) = 0.$$

Rötterna till en andragradsekvation ges av den enkla formeln (0.11), sidan 18. Även för tredje- och fjärdegradsekvationer finns allmänna lösningsalgoritmer, som dock är betydligt mer komplicerade. Vi går inte

in på dem här. — Det är däremot känt sedan början av 1800-talet att det inte går att finna några allmänna lösningsformler för ekvationer vars grad är större än 4. Detta faktum ska inte förväxlas med möjligheten att med numeriska metoder bestämma lösningarna *approximativt* med all önskvärd noggrannhet.

Polynomdivision

När man dividerar två heltal, säg 67 med 5, brukar man arrangera räkningarna på följande sätt:

$$\begin{array}{r} 13 \\ 5 \overline{) 67} \\ \underline{-5} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 2 \end{array}$$

Det matematiska innehållet i denna formaliserade uppställning framgår av likheterna

$$67 = 10 \cdot 5 + 17 = 10 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2$$

och kan sammanfattas som

$$\frac{67}{5} = 13 + \frac{2}{5}$$

Vi säger att vi har fått *kvoten* 13 och *resten* 2.

På analogt sätt utför man division av två polynom. Vi illustrerar principen med ett konkret exempel. Den formella uppställningen vid division av $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 2$ med $g(x) = x^2 + x + 1$ blir som följer:

$$\begin{array}{rcl} \text{kvot} \rightarrow & 2x^2 - 2x + 6 & \\ \text{täljare} \rightarrow & \begin{array}{r} 2x^4 + 6x^2 + 2 \\ \underline{-(2x^4 + 2x^3 + 2x^2)} \\ -2x^3 + 4x^2 + 2 \\ \underline{-(-2x^3 - 2x^2 - 2x)} \\ 6x^2 + 2x + 2 \\ \underline{-(6x^2 + 6x + 6)} \\ -4x - 4 \end{array} & \begin{array}{l} \boxed{x^2 + x + 1} \leftarrow \text{nämnare} \\ \\ \leftarrow \text{rest} \end{array} \end{array}$$

Det första steget i räkningarna ger termen $2x^2$ i kvoten och betyder att vi gjort omskrivningen

$$(8) \quad 2x^4 + 6x^2 + 2 = 2x^2(x^2 + x + 1) + (-2x^3 + 4x^2 + 2).$$

Därvid har den sista parentesens innehåll erhållits genom subtraktionen

$$2x^4 + 6x^2 + 2 - 2x^2(x^2 + x + 1),$$

och faktorn $2x^2$ har valts så att x^4 -termerna försvinner vid denna operation. Likheten (8) kan skrivas som

$$\frac{2x^4 + 6x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = 2x^2 + \frac{-2x^3 + 4x^2 + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Här är graden av det sista bråkets täljare lägre än graden av den ursprungliga täljaren. Med samma idé reducerar vi gradtalet ytterligare. Innebörden av det andra steget i uppställningen ovan är att

$$\frac{-2x^3 + 4x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = -2x + \frac{6x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Ännu en upprepning ger

$$\frac{6x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} = 6 + \frac{-4x - 4}{x^2 + x + 1},$$

men därefter måste proceduren avbrytas eftersom i det sist erhållna bråket täljarens gradtal är lägre än nämnarens.

Sammanfattningsvis innebär ovanstående *divisionsalgoritm* att vi har gjort omskrivningen

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^4 + 6x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = 2x^2 - 2x + 6 + \frac{-4x - 4}{x^2 + x + 1}.$$

Polynomet $2x^2 - 2x + 6$ kallas **kvoten** och $-4x - 4$ kallas **resten** vid division av $f(x)$ med $g(x)$, helt i analogi med heltalsdivisionen $\frac{67}{5} = 13 + \frac{2}{5}$.

Med detta exempel som förebild kan man visa följande allmänna resultat om division av polynom.

SATS 2. (OM DIVISION AV POLYNOM) Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara givna polynom med $\text{grad } g \geq 1$. Då finns två polynom $q(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$\text{grad } r < \text{grad } g$$

och

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Den sista relationen kan också skrivas

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Om resten $r(x)$ blir noll vid en polynomdivision säger vi att divisionen går jämnt ut. Detta betyder att

$$f(x) = g(x)q(x),$$

dvs. att $g(x)$ (och även $q(x)$) är en faktor i $f(x)$.

Faktorsatsen

Vi återvänder nu till den allmänna polynomekvationen

$$f(x) = 0.$$

Om man har lyckats hitta en faktor av formen $x - \alpha$ i $f(x)$, dvs. om man kan skriva

$$f(x) = (x - \alpha)q(x),$$

så har man också funnit en rot till ekvationen $f(x) = 0$, nämligen talet α . Ty självklart gäller då att

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0.$$

Omvänt ska vi nu se att varje rot α till $f(x) = 0$ svarar mot en faktor av formen $x - \alpha$ i polynomet $f(x)$.

SATS 3. (FAKTORSATSEN) Antag att talet α är en rot till polynomekvationen $f(x) = 0$. Då är polynomet $x - \alpha$ en faktor i $f(x)$, dvs.

$$f(x) = (x - \alpha)q(x)$$

för något polynom $q(x)$.

BEVIS. Vår förutsättning är alltså att $f(\alpha) = 0$. Om vi dividerar $f(x)$ med $x - \alpha$ får vi enligt sats 2 en rest $r(x)$ sådan att

$$\text{grad } r < \text{grad}(x - \alpha) = 1.$$

Resten har därför graden noll, dvs. den är ett konstant polynom. Med andra ord är

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + C$$

för någon konstant C . Genom att här välja $x = \alpha$ får vi

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + C = C.$$

Men enligt förutsättningen är $f(\alpha) = 0$. Alltså har vi visat att $C = 0$ och därmed att

$$f(x) = (x - \alpha)q(x).$$

Beviset är klart. □

Faktorsatsen kan bland annat användas i situationer när man genom gissning eller på annat sätt lyckats hitta en rot α till en polynomekvation $f(x) = 0$. Genom att då dividera $f(x)$ med motsvarande faktor $x - \alpha$ åstadkommer man en minskning av ekvationens gradtal med en enhet och skaffar sig därmed ett gynnsammare läge för fortsatt behandling av ekvationen.

Exempel 13. Till ekvationen

$$x^3 + 6x^2 + \frac{23}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

har man lyckats hitta roten $x = -4$. Lös ekvationen fullständigt.

Lösning: Division med faktorn $x - (-4) = x + 4$ ger faktoriseringen

$$x^3 + 6x^2 + \frac{23}{3}x - \frac{4}{3} = (x + 4)\left(x^2 + 2x - \frac{1}{3}\right)$$

(Observera att enligt factorsatsen måste divisionen gå jämnt ut.) De återstående rötterna ges alltså av andragradsekvationen

$$x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0.$$

Lösning av denna ger $x = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Vår tredjegradsekvation har alltså de tre rötterna -4 , $-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ och $-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. □

I de flesta fall är det naturligtvis helt omöjligt att gissa en rot till exempelvis en tredjegrads ekvation. För att detta ska lyckas bör ekvationen vara av relativt enkelt slag, till exempel ha heltalskoefficienter, och även om så skulle vara fallet är det inte realistiskt att gissa på annat än eventuella rationella rötter. För just denna situation finns det ett resultat som visar, att det faktiskt inte är fråga om ren gissning utan snarare om en systematisk genomgång av ett begränsat antal möjligheter.

SATS 4. Antag att

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

är ett polynom med heltalskoefficienter. Låt

$$\alpha = \frac{p}{q}$$

vara ett rationellt tal skrivet så att heltalen p och q saknar gemensamma faktorer (utom ± 1). Om α är en rot till ekvationen $f(x) = 0$ så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n .

BEVIS. Vi antar alltså att

$$f(\alpha) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplikation med q^n och överflyttning av den sista termen till högra sidan ger

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Eftersom p är en faktor i var och en av termerna i vänsterledet, och därmed i hela vänsterledet (bryt ut p), så måste p också vara en faktor i högerledet $-a_0 q^n$. Men enligt förutsättningen saknar p och q gemensamma faktorer. Alltså måste p vara en faktor i a_0 .

På motsvarande sätt visas att q är en faktor i a_n . $\square$

Exempel 14. Gör ett fullständigt underlag för "gissning" av rationella rötter i exempel 13 ovan.

Lösning: För att få bort nämnarna multiplicerar vi ekvationen med 3 och erhåller

$$3x^3 + 18x^2 + 23x - 4 = 0.$$

Nu kan sats 4 användas. För en eventuell rot $\alpha = \frac{p}{q}$ måste därför gälla något av alternativen

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4 \quad \text{respektive} \quad q = \pm 1, \pm 3.$$

De enda rationella tal som det kan löna sig att testa är alltså

$$\pm 1, \quad \pm \frac{1}{3}, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{2}{3}, \quad \pm 4, \quad \pm \frac{4}{3}.$$

□

För säkerhets skull påpekar vi att gissningssatsen ovan inte ger någon allmän metod att finna lösningar till polynomekvationer. Inte ens ekvationer med heltalskoefficienter behöver ha någon rationell rot. Ett enkelt exempel på detta är ekvationen

$$x^2 - 2 = 0.$$

Denna har ju rötterna $\pm\sqrt{2}$, som *inte* är rationella.

Faktorsatsen säger att om talet α är en rot till ekvationen $f(x) = 0$ så är $x - \alpha$ en faktor i $f(x)$. Det är naturligtvis fullt möjligt att $f(x)$ innehåller *flera* likadana faktorer $x - \alpha$. Antalet sådana faktorer kallar vi **multipliciteten** av roten α . I fallet då multipliciteten är 2 talar man om en **dubbelrot**, då multipliciteten är 1 om en **enkelrot**. Till exempel har ekvationen

$$(x - 7)^3(x + 4)^2(x^2 + 1) = 0$$

de reella rötterna 7 och -4 , där 7 har multipliciteten 3 och -4 är en dubbelrot.

Betrakta en tredjegradsekvation

$$(9) \quad f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

där högstgradskoefficienten är 1. Antag att denna har *tre* reella rötter räknade med multiplicitet, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Vi kan då faktorisera polynomet $f(x)$ fullständigt:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Hopmultiplicering av dessa faktorer ger

$$f(x) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

(genomför själv räkningen). En jämförelse med koefficienterna i (9) leder till att

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a_1,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_0.$$

Detta resultat brukar kallas *sambandet mellan rötter och koefficienter* i en tredjegrads ekvation. Läsaren kan själv verifiera att resultatet stämmer i exempel 13 ovan.

Motsvarande räkningar kan göras för ekvationer av godtycklig grad.

Det viktigaste resultatet är:

Om en ekvation av n :te graden

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

med högstgradskoefficienten 1 har n reella rötter (räknade med multiplicitet) så är deras summa lika med $-a_{n-1}$ och deras produkt lika med $(-1)^n a_0$.

För en andragrads ekvation

$$x^2 + px + q = 0$$

med rötterna α_1 och α_2 har vi speciellt

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -p, \quad \alpha_1\alpha_2 = q.$$

1.4.4 Geometrisk summa

Varje polynom av formen

$$x^n - 1$$

har uppenbart nollstället 1 och är därmed enligt faktorsatsen jämnt delbart med $x-1$. Till exempel är ju

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad (\text{konjugatregeln})$$

och

(10)

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Lösning: Om vi sätter $z = re^{i\theta}$ är ekvationen ekvivalent med

$$r^3 e^{i3\theta} = 8i = 8e^{i\pi/2}.$$

Alltså är

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

De olika lösningarna blir alltså

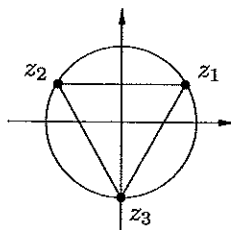
$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2,$$

dvs.

$$z_1 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2e^{i3\pi/2} = -2i.$$



□

A.10 Allmänna polynomekvationer

Vi ska nu diskutera allmänna polynomekvationer, dvs. ekvationer av formen

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Vi förutsätter att polynomkoefficienterna a_k är komplexa tal.

I avsnitt 1.4.3 studerade vi polynom med reella koefficienter. Många begrepp och satser där blir oförändrade då koefficienterna tillåts vara komplexa. Sålunda definierar vi även i det komplexa fallet *graden* av $p(z)$ som talet n om koefficienten a_n är skild från noll. Med en *lösning* eller *rot* till ekvationen $p(z) = 0$, alternativt ett *nollställe* till polynomet $p(z)$, menas ett komplext tal α som satisfierar $p(\alpha) = 0$. *Satsen om division av polynom* och *faktorsatsen*, så som de är framställda i satserna 1.2 och 1.3, sidan 53, gäller med oförändrade bevis även för komplexa polynom, och vi upprepar dem inte här. Detsamma gäller *sambandet mellan rötter och koefficienter* i en n -tegradsekvation (se sidan 57). Begreppet *multiplicitet* av rot eller nollställe definieras som i det reella fallet.

I andra avseenden däremot skiljer sig den reella och den komplexa teorin. Vi ska nu utveckla den senare.

Faktorisering av komplexa polynom

Vi utgår från följande grundläggande sats, vars bevis kräver mer avancerade hjälpmedel än de som behandlas i denna lärobok.

SATS 8. (ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS) *Varje komplex polynom-ekvation $p(z) = 0$, där $\text{grad } p \geq 1$, har minst en komplex rot.*

Med hjälp av faktorsatsen kan algebrans fundamentalsats skärpas ytterligare.

SATS 9. *Om $\text{grad } p = n$ så har ekvationen $p(z) = 0$ precis n rötter, om varje rot räknas så många gånger som dess multiplicitet anger.*

BEVIS. Enligt algebrans fundamentalsats har $p(z)$ åtminstone ett nollställe α_1 , varför enligt faktorsatsen

$$p(z) = (z - \alpha_1)p_1(z), \quad \text{där} \quad \text{grad } p_1 = n - 1.$$

Av samma anledning har polynomet p_1 ett nollställe α_2 (eventuellt lika med α_1), och faktorsatsen ger då att

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)p_2(z), \quad \text{där} \quad \text{grad } p_2 = n - 2.$$

Vi kan fortsätta på detta sätt tills vi får

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)p_n(z), \quad \text{där} \quad \text{grad } p_n = 0.$$

Då är p_n en konstant $\gamma \neq 0$, och vi ser att $p(z)$ har precis nollställena $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Därmed är satsen bevisad. $\square$

Vårt resultat kan också formuleras på följande sätt.

FÖLJDSATS 1. *Varje komplext polynom kan delas upp i komplexa faktorer av första graden enligt*

$$p(z) = \gamma(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n),$$

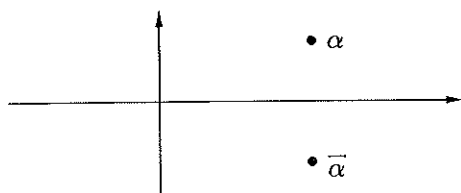
där $n = \text{grad } p$, talen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ är nollställena till $p(z)$ och $\gamma \neq 0$ är en konstant (nämligen koefficienten för högstgradstermen i p).

Problemet att faktorisera reella polynom i reella faktorer är något mer komplicerat.

Faktorisering av reella polynom

Vi betraktar i fortsättningen polynom med *reella* koefficienter. Sådana polynom kan ha icke-reella nollställen, till exempel har polynomet $x^2 + 1$ nollställena i och $-i$. Nästa sats visar emellertid att nollställena till reella polynom inte kan ligga utspridda hur som helst i det komplexa talplanet utan måste uppträda parvis.

SATS 10. Antag att polynomet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ har reella koefficienter a_k . Om då $\alpha = a + ib$ är en rot till ekvationen $p(z) = 0$ så är även $\bar{\alpha} = a - ib$ en rot till denna.



BEVIS. Enligt förutsättningen är $p(\alpha) = 0$. Eftersom koefficienterna är reella är $\overline{a_k} = a_k$. Alltså ger reglerna för konjugering att

$$\begin{aligned} p(\bar{\alpha}) &= a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = \\ &= a_n \overline{\alpha^n} + a_{n-1} \overline{\alpha^{n-1}} + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = \\ &= \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \\ &= \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Beviset är klart. □

Anmärkning. Vi har här inte bevisat att om α är ett icke-reellt nollställe av en viss multiplicitet så är $\bar{\alpha}$ ett nollställe av precis samma multiplicitet. Detta är dock fallet och följer av vår utredning om reell faktorisering av $p(z)$ nedan.

Exempel 20. Antag att vi råkar veta att ekvationen

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 4z - 4 = 0$$

har roten $z_1 = 1+i$. Vi önskar lösa ekvationen fullständigt. Eftersom polynomet $p(z)$ har reella koefficienter så känner vi enligt sats 10 automatiskt ännu en rot, nämligen $z_2 = 1-i$. Enligt faktorsatsen innehåller polynomet därför faktorn

$$(35) \quad (z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2.$$

Division av $p(z)$ med detta polynom ger kvoten $z^2 - 2$, varför vi har faktoriseringen

$$z^4 - 2z^3 + 4z - 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2).$$

Övriga nollställen till $p(z)$ ges alltså av

$$z^2 - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}.$$

Sammanfattningsvis har ekvationen de fyra rötterna

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i, \quad z_3 = \sqrt{2}, \quad z_4 = -\sqrt{2}.$$

Som en viss kontroll av räkningarna observerar vi att rötternas summa är $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2$, dvs. lika med koefficienten för z^3 med ombytt tecken, och deras produkt är $z_1 z_2 z_3 z_4 = -4$, lika med den konstanta termen, allt i överensstämmelse med sambandet mellan rötter och koefficienter på sidan 57. $\square$

Att produkten av de två komplexa polynomen i (35) ovan blir ett polynom med *reella* koefficienter är ingen tillfällighet. Allmänt gäller att

$$(36) \quad (z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - 2(\operatorname{Re} \alpha)z + |\alpha|^2.$$

Denna observation utnyttjas i beviset av nästa sats.

SATS 11. *Varje polynom med reella koefficienter kan delas upp i reella faktorer vars grad är lika med 1 eller 2.*

BEVIS. Låt p vara ett polynom av graden n med reella koefficienter. Om p har enbart reella nollställen är saken klar enligt sats 9. Antag att p har ett icke-reellt nollställe α . Enligt sats 10 är då även $\bar{\alpha}$ ett nollställe och det *reella* polynomet

$$q(z) = (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$$

är en faktor i $p(z)$. Division av p med q måste ge en reell kvot p_1 , dvs. vi har

$$p(z) = q(z)p_1(z),$$

där alla polynom har reella koefficienter och $\text{grad } q = 2$, $\text{grad } p_1 = n - 2$. Vi kan upprepa resonemanget på p_1 . Efter ett ändligt antal steg får vi den sökta faktoriseringen i reella första- och andragradstermer. $\square$

Exempel 21. Det reella polynomet

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 4z - 4$$

i exempel 20 har den fullständiga komplexa faktoriseringen

$$p(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2}),$$

och den reella faktoriseringen

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2}).$$

$\square$

Arne Persson Lars-Christer Böiers

Analys i en variabel

 Studentlitteratur