

KTH Matematik
Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om avståndsformeln och cirkelns ekvation.

Förberedande uppgifter - lös dessa innan workshopen

I denna workshop kommer ni att undersöka några viktiga begrepp inom den analytiska geometrin, dvs den gren av geometrin där man använder sig av koordinatsystem för att beskriva geometriska objekt och bestämma deras egenskaper. Eftersom koordinaterna beskriver objekten med hjälp av *tal*, kan man med lämpliga *beräkningar* bestämma olika egenskaper hos objekten. Den idé går tillbaka till René Descartes (Renatus Cartesius), 1596 - 1650.

1. AVSTÅND I PLANET

Uppgift 1. Använd Pytagoras Sats för att beräkna avståndet mellan de två punkter i planet som har koordinater $(-1, 1)$ respektive $(2, 6)$.

Uppgift 2. Avståndsformeln i planet. Härled, med hjälp av Pytagoras Sats, ett uttryck för avståndet mellan två punkter i planet med koordinater (x_1, y_1) respektive (x_2, y_2) .

Uppgift 3. Beräkna längden av sidorna i triangeln vars hörn har koordinater $(1, 2)$, $(3, -1)$ respektive $(-2, 1)$ genom att använda den avståndsformel du härledde i förra uppgiften.

2. CIRKELNS EKVATION.

Definition. En cirkel i planet med medelpunkt (a, b) och radie $r > 0$ definieras som mängden av alla punkter (x, y) som befinner sig på avstånd r ifrån medelpunkten (a, b) .

Uppgift 4. Övertyga dig om att denna definition av en cirkel motsvarar det du intuitivt vill kalla en cirkel.

Definitionen är alltså ett villkor som bestämmer vilka punkter (x, y) som ska höra till cirkeln. Detta villkor kan också skrivas som en ekvation i (x, y) ; cirkeln består av precis de punkter vars koordinater (x, y) uppfyller ekvationen.

Uppgift 5. Utgå från ovanstående definition av en cirkel och avståndsformeln du härledde i Uppgift 2, och härled ekvationen för en cirkel med radie r och medelpunkt (a, b) .

Uppgifter att arbeta med under workshopen

Börja med att diskutera och jämföra era lösningar på de förberedande uppgifterna. Ser ni hur Pytagoras Sats, avståndsformeln och cirkelns ekvation hänger ihop med varandra?

3. MER OM CIRKELNS EKVATION

Uppgift 6. a) Ange ekvationen för den cirkel C som har radie 11 och medelpunkt i $(10, -2)$.

b) Avgör om origo ligger inuti, på eller utanför cirkeln C .

c) Ange en olikhet som är uppfylld precis av de punkter som

- ligger strikt inuti (dvs inuti i men inte på) cirkeln C ;
- inuti eller på cirkeln C ;
- strikt utanför cirkeln C .

Exempel. Ekvationen

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6$$

beskriver en cirkel med medelpunkt $(1, -2)$ och radie $\sqrt{6}$. Genom att utveckla vänster led och sedan förenkla kan denna ekvation också skrivas

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1.$$

Om vi istället är givna den senare ekvationen, och vill förstå hur dess lösningsmängd ser ut kan vi genom att kvadratkomplettera försöka ta oss till standardformen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1 \iff$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 1 + 1 + 4 \iff$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6,$$

och på så sätt se att lösningsmängden faktiskt är en cirkel och avläsa medelpunkten till $(1, -2)$ och radien till $\sqrt{6}$.

Uppgift 7. Skissera och beskriv med ord lösningsmängden till

- a) ekvationen $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 11$
- b) ekvationen $2x^2 + 12x + 2y^2 - 16y = 22$
- c) olikheten $-9 < x^2 + 6x + y^2 - 8y < 11$

- d) olikheten $-9 \leq x^2 + 6x + y^2 - 8y \leq 11$
 e) ekvationen $x^2 - 2x + y^2 = -1$
 f) olikheten $x^2 - 2x + y^2 < -1$

4. AVSTÅND PÅ LINJEN

Uppgift 8. Om x_1 och x_2 är två punkter på x -axeln har vi nu två sätt att beräkna avståndet mellan dessa två punkter.

I. Antingen använder vi absolutbeloppet för att uttrycka avståndet mellan x_1 och x_2 .

II. Eller så tänker vi på x -axeln som en del av xy -planet, punkterna x_1 och x_2 har då koordinater $(x_1, 0)$ respektive $(x_2, 0)$, och beräknar avståndet med avståndsformeln i planet.

Visa att dessa två metoder ger samma resultat.

5. AVSTÅND I RUMMET

Uppgift 9. Om vi inför ett rätvinkligt koordinatsystem i i det tredimensionella rummet, med samma längdskala på alla tre axlarna, kommer avståndet d mellan två punkter (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) att ges av

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bevisa detta!

Uppgift 10. Beskriv med ord de geometriska objekt som definieras av

- a) ekvationen $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 9$;
 b) olikheten $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + z^2 \leq 9$

6. ELLIPSER OCH HYPERBLAR

I Uppgift 8 härledde du ekvationen för en cirkel i planet med given radie och medelpunkt. Vi ska nu avsluta denna workshop med att studera några andra liknande ekvationer.

Uppgift 11. Undersök följande ekvationer och olikheter genom att använda en grafitande räknare eller motsvarande programvara/app för att rita de kurvor som uppfyller ekvationerna.

- a) $x^2 + 4y^2 = 16$ b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ c) $\frac{(x - 3)^2}{4^2} + \frac{(y + 1)^2}{2^2} = 1$
 d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1$ e) $x^2 - y^2 = 1$ f) $\frac{y^2}{2^2} - x^2 = 4$.

Läs nu artikeln om *Kägelsnitt* på svenska Wikipedia,
<https://sv.wikipedia.org/wiki/Kägelsnitt>, speciellt avsnitten om *Ellipsen* och *Hyperbeln*.

Uppgift 12. Skissera och beskriv med ord lösningsmängden till ekvationerna

- a) $4x^2 + 9y^2 = 36$
- b) $4x^2 - 9y^2 = 36$
- c) $-4x^2 - 9y^2 = 36$
- d) $-4x^2 + 9y^2 = 36$

Uppgift 13. Beskriv och skissera mängden av de punkter i planet som uppfyller följande olikheter

- a) $x^2 + 2y^2 < 3$
- b) $x^2 + 2y^2 \leq 3$
- c) $x^2 + 2y^2 > 3$

Uppgift 14. Beskriv och skissera lösningsmängderna till följande ekvationer

- a) $25x^2 - 100x - 4y^2 - 24y = -14$
- b) $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y = 11$
- c) $x^2 - 2x + y^2 - 4y = -7$