

Hemligheterna förklarade

1.1 Varför man räknar

Matematiken kan delas in i två stora områden: aritmetiken och geometrin. Enkelt uttryckt är aritmetiken räknandet med siffror. Geometrin är det som har med uppmätning av avstånd, ytor och volymer att göra.

Hur det gick till historiskt vet vi inte, men mycket tyder på att denna uppdelning har en naturlig grund i de tidiga mänskliga kulturernas behov. Så snart människor började bli bofasta eller i vart fall började samla på sig ägodelar uppstod troligen ett behov att hålla reda på dem, att räkna dem. De som brukade jorden hade ett behov av att kunna mäta upp markområden. De som höll djur ville förstås kunna hålla reda på att inga försvann eller stals. Låt oss fantisera om hur det kan ha gått till.

Herden släpper ut sina djur på bete på morgonen och hämtar hem dem på kvällen. Han, eller hon¹, vill hålla reda på att alla djur kommer med hem. En dag får hen en idé. Om man för varje djur som släpps ut i hagarna plockar upp en sten och lägger den i en särskild hög, kan man sedan på kvällen plocka bort en sten från högen för varje djur som återfinns. Om alla är med, ska högen vara borta när sista djuret är infångat. Idén är genial, men den har en brist: Tänk om någon, djur eller människa, sparkar till högen under dagen? Eller om någon listig men oärlig buse stjälar några djur och samtidigt plockar bort lika många stenar? Då kanske nästa idé uppstod: att lägga stenarna i en skinnpåse.

Men även skinnpåsen kan trixas med om man inte bär med sig den hela dagen, och den kan vara rätt så tung med många stenar i. Bättre då att lägga stenarna i en kruka som man försluter med ett lock av lera som får stelna.

¹ I fortsättningen använder vi – i sann matematisk anda att vara allmängiltiga – det nya pronomet *hen*.

Eftersom krukan måste krossas för att man ska kunna plocka ur några stenar ser herden om någon varit framme och försökt luras.

På detta sätt kan det ha hållit på i århundraden ända tills någon kom på nästa smarta steg. Även ägaren till djuren var ju tvungen att krossa krukan för att komma åt stenarna. Varför inte i stället hitta på några symboler att pressa in i den våta leran på utsidan av krukan innan man försluter den och låta dessa symboler stå för hur många stenar det finns i krukan? Så länge krukan är hel kan ingen ha plockat ur stenar, och man kan vara helt säker på att symbolerna svarar mot det riktiga antalet stenar.

Så här långt kunde nog vem som helst komma på detta. Men nästa steg krävde kanske ett geni. Om man nu ändå har symboler utanpå krukan så behöver man ju inga stenar i den. Och man behöver ingen kruka heller, man kan ha en lertavla eller något annat fast att skriva på. Man behöver inte ens det. Man kan komma ihåg antalet. De abstrakta talen – skrivna med siffersymboler – är uppfunna!

Men detta är trots allt spekulationer.² Kunskaperna om matematikens tidiga historia mycket osäkra. Troligen utvecklades en praktisk användbar matematik parallellt med språket långt tillbaka i människans historia. Nedtecknad, eller skriven matematik, utvecklades tillsammans med skriftspråken i de första högkulturerna i Egypten, Mellanöstern, Indien och Kina. I och med den grekiska civilisationens framväxt under mitten av första årtusendet före vår tideräkning utvecklades sedan en mer abstrakt matematik. Den började leva ett eget liv, där begrepp och metoder utforskades för dess egna inreboende tjusning, och inte enbart för tillämpningarnas behov. Den grekiska kulturen kom att prägla matematiken på ett sätt som lever kvar ända in i nutid. Den var på en gång frikopplad från vardagens strävan, men samtidigt tillämpad inom exempelvis astronomin. Även de andra högkulturerna har lämnat spår i ämnet.

1.2 Hur man räknar

De symboler vi i dag använder för att räkna, *siffrorna*, har sitt ursprung långt tillbaka i tiden. De kan spåras till Brahmskriften från Indusdalen för

² Vi läste en variant av denna påhittade historia på bloggen *The n-category café*. Ursprunget till historien kan vara i G. Ifrah, *From One to Zero, A Universal History on Numbers*.

tvåtusentrehundra år sedan. I dag skriver vi siffrorna på följande sätt:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Med dessa siffror kan vi uttrycka tal, eller antal, upp till nio. Men hur gör man för att uttrycka större tal? Tio, elva, eller tolv? Vi vet förstås svaret: man skriver tio som 10, elva som 11, tolv som 12 och så vidare. Ingen tänker väl till vardags djupare på detta, men det ska vi göra nu. Vi ska göra det eftersom det kommer att visa oss lite av matematikens *maskineri*, och det är just detta maskineri som man måste bli bekant med för att kunna studera matematik på högskolan. Vi kommer också att se att maskineriet inte är perfekt.

Vad är egentligen 12? Frågan är inte särskilt precis, men det svar vi är ute efter är att tolv är tio plus två, eller $12 = 10 + 2$. På samma sätt är $17 = 10 + 7$ och $11 = 10 + 1$.

Men vad är 10? Ja, vad är tio? Är svaret att tio är tio plus noll, alltså att $10 = 10 + 0$? Det verkar inte riktigt.

Vi har redan nu, innan vi ens börjat räkna på allvar, hittat något konstigt i räknekonstens grunder. Det fattas en siffra! Vi gläntar på dörren till matematikens maskinrum ser att maskinen är ett mänskligt bygge, den är inte perfekt. Låt oss rätta till detta och lägga till en siffra för tio. Vi skriver den som Υ (den grekiska bokstaven "ypsilon", men vi kallar den för "tio"). Våra siffror borde vara

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Υ

Nu ser det mycket bättre ut. Vi har exempelvis $17 = \Upsilon + 7$, $12 = \Upsilon + 2$, $11 = \Upsilon + 1$ och förstås

$$10 = \Upsilon + 0$$

Talet tio skrivs som 10 och är lika med den tionde siffran plus noll, precis som exempelvis talet elva skrivs som 11 och uttrycks som den tionde siffran plus ett. Så kan man hålla på tills man kommer upp till talet nitton som skrivs som 19 och är lika med den tionde siffran plus nio, det vill säga $19 = \Upsilon + 9$.

Sedan kommer tjugo. Hur uttrycker man 20? Vi använder samma logik. Tjugo är lika med den tionde siffran plus tio. Men tio är den tionde siffran.

$$20 = \Upsilon + 10 = \Upsilon + \Upsilon = 2 \cdot \Upsilon$$

Nu går det undan! Hur uttrycker man 24? Jo, som $24 = Y + Y + 4 = 2 \cdot Y + 4$. Hur uttrycker man 29? Jo, som $29 = Y + Y + 9 = 2 \cdot Y + 9$. Hur uttrycker man 30? Jo, som $30 = Y + Y + Y = 3 \cdot Y$

Inga problem dyker upp innan man kommer upp till hundra. Vi uttrycker nittionio som $99 = 9 \cdot Y + 9$. Men hur uttrycker vi hundra? Låt oss undersöka om mönstret håller i sig:

$$100 = 9 \cdot Y + Y = (9 + 1)Y = 10 \cdot Y = Y \cdot Y$$

Någon kanske nu gissar att man kan göra ett hopp och skriva ett stort tal som exempelvis ettusen som $Y \cdot Y \cdot Y$. Det är förstås helt riktigt. Men samtidigt gör man det bekvämt för sig, så att man slipper att skriva ut så många Y gånger sig själv. Man skriver exempelvis $Y \cdot Y = Y^2$ och $Y \cdot Y \cdot Y = Y^3$. När man har en produkt av ett tal gånger sig självt ett visst antal gånger, det behöver inte vara just Y , förenklar man i allmänhet skrivsättet på detta vis. Det kallas för *potenser*.

Översättningen mellan dessa potenser av Y och det vanliga sättet att skriva är

$$Y = 10$$

$$Y^2 = 100$$

$$Y^3 = 1000$$

$$Y^4 = 10\,000$$

...

Låt oss ta ett exempel till. När vi skriver talet 3 724 menar vi alltså

$$3\,724 = 3 \cdot Y^3 + 7 \cdot Y^2 + 2 \cdot Y + 4$$

Poängen med detta är att siffrorna i talet 3 724 har olika värde, beroende på var i talet de står. Man börjar räkna från höger. Den första siffran är då 4. Den kallas *entalssiffra* och den har sitt värde $4 \cdot 1 = 4$. Den andra siffran (fortfarande från höger) är 2. Den kallas *tioentalssiffra* och den har värdet $2 \cdot Y = 2 \cdot 10 = 20$. Nästa siffra är 7. Den kallas *hundraentalssiffra* och den har värdet $7 \cdot Y^2 = 7 \cdot 100 = 700$. Till sist: siffran 3 kallas *tusentalssiffra* och har

värdet $3 \cdot Y^3 = 3 \cdot 1000 = 3000$. Vi har alltså 4 ental, 2 tiotal, 7 hundratal och 3 tusental. Skriver man ut detta i detalj får man

$$\begin{aligned} 3 \cdot Y^3 + 7 \cdot Y^2 + 2 \cdot Y + 4 &= \\ 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 &= \\ 3000 + 700 + 20 + 4 &= 3724 \end{aligned}$$

Detta sätt att skriva tal som är större än 9 är alla bekanta med från skolan. Här har vi sett hur man kan räkna med det. Det kallas för *positionssystemet* eller *platsvärdessystemet* eftersom siffrorna får värde efter sin position eller plats i talet. Man säger att systemet har *basen tio*. Basen tio är precis den dolda siffran Y .

Varför ser man inte symbolen Y för tio i andra matematikböcker? Varför har man inte sett den under tolv år i skolan? Förklaringen är rent historisk. Det går lika bra att använda 10 som symbol för den dolda elfte siffran. När man väl har förstått att $10 = 1 \cdot Y + 0$ behöver man inte använda Y mer. När en gång i tiden denna del av matematikens maskineri konstruerades gjordes detta speciella val av symboler och sätt att räkna. Vi ska dock se att när man räknar i positionssystem med andra baser än 10 (exempelvis det binära med basen 2) används faktiskt en sådan extra siffra.

ÖVNINGAR

Övning 1. Skriv om följande tal, skrivna med den elfte siffran, till vanlig form.

a. $Y + 3$

b. $3Y^2 + 7Y$

c. $7Y^3 + 3Y + Y$

d. $2Y^5 + 3Y^3 + 9$

□

Övning 2. Hur kan talen nedan uttryckas med hjälp av den elfte siffran?

a. 74

b. 319

c. 6705

d. 50014

□

KONSTEN ATT RÄKNA

Matematik inför högskolan

ANDERS BENGTSSON
MATS DESAIX