

5. POTENSER

Några av de vanligaste potenserna har egna namn. a^2 kallas ofta för a i kvadrat eller kvadraten på a , eftersom uttrycket motsvarar beräkningen av arean på en kvadrat med sidlängden a . På samma sätt kallas a^3 för a i kubik eller kubiken på a eftersom det ger volymen på en kub med sidlängd a .

När man inför ett räknesätt måste man också bestämma dess prioritet relativt andra räknesätt:

Definition 5.2: Prioritet hos potenser Man har bestämt att potenser prioritetsmässigt går före alla de fyra räknesätten. Så $a \cdot b^n$ tolkas som $a \cdot (b^n)$. Vill man att exponenten ska kopplas till båda talen måste man skriva $(a \cdot b)^n$. Så

$$2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162 \quad \text{medan} \quad (2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$$

Detta gäller även unära minus: -3^4 ska tolkas som $-(3^4) = -81$, och ska inte förväxlas med $(-3)^4 = 81$.

Det är också nödvändigt att bestämma prioritet för potens av potens, för resultatet beror av vilken potens man beräknar först:

$$4^{(3^2)} = 4^9 = 262144 \quad \text{men} \quad (4^3)^2 = 64^2 = 4096$$

Ö5.5 Man har bestämt att 4^{3^2} (utan parenteser) ska tolkas som $4^{(3^2)}$. ■

Ur definitionen går det att härleda ett antal räkneregler:

Undersökning 5.1: Räkneregler för potenser Eftersom potensräkning är baserad på multiplikation verkar det motiverat att se vad som händer om man kombinerar räknesätten:

Vad blir potensen av en produkt?

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}_{n \text{ par}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ st}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ st}} = a^n \cdot b^n$$

Samma effekt blir det på kvoter:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ö5.1 Potenser av summor och differenser blir mycket mer komplicerade, se avsnitt 6.1.1. Normalt gäller att $(a + b)^n \neq a^n + b^n$.

I det första fallet som vi undersökte fick vi potenser med samma exponent, men olika baser. Vad händer om det är tvärtom: om man har två potenser med samma bas, men olika exponenter?

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ st}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ st}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ st}} = a^{m+n}$$

Multiplikerar man potenserna så *adderas* exponenterna.

Motsatsen till multiplikation är division, och det ger motsatsen till addition, det vill säga subtraktion, av exponenterna:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{föresatt att } m > n$$

(Reservationen $m > n$ är till för att vi inte ska få en negativ exponent, för det vet vi ännu inte vad det betyder.)

Ö5.2

Slutligen ser vi vad som händer om man tar en potens av en potens:

$$(a^m)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m \text{ st}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m \text{ st}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m \text{ st}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m \cdot n \text{ st}} = a^{m \cdot n}$$

n grupper

Här multipliceras exponenterna.

Räknereglerna kommer att sammanfattas i sats 5.1 på sidan 106. ■

För att få en uppfattning av vad potensberäkning innebär uttryckt i siffror kan det vara givande att tabellera upp ett antal potenser:

	1	2	3	4	5	...
0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	1	1	1	...
2	2	4	8	16	32	...
3	3	9	27	81	243	...
4	4	16	64	256	1024	...
5	5	25	125	625	3125	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Alla tal i en viss rad har samma bas, alla tal i en viss kolumn har samma exponent. I tvåans rad har vi därför tvåpotenser och i tvåans kolumn jämna kvadrater.

Ö5.3

Tabellen kan ge inspiration till funderingar på generalisering av potensbegreppet:

Undersökning 5.2: Icke-positiva exponenter Genom att definiera a^n som " n stycken a :n hopmultipliserade" har vi begränsat n till de positiva heltalen. (Det är ju lite svårt att säga vad minus två stycken a eller ett halvt a eller inget a alls "hopmultipliserat" konkret skulle innebära). Men genom att titta på värdena och räknereglerna kan man hitta vettiga tolkningar även för andra sorters tal.

Exponent noll Rad 2 i tabellen över potenser innehåller 2^1 , 2^2 , 2^3 och så vidare. Varje tal är dubbelt så stort som det innan, eller annorlunda uttryckt: varje tal är hälften av det som står efter. Om man läser raden åt vänster

5. POTENSER

ser det ut som att talet före 2:an borde vara 1. Det stämmer också med räknereglerna:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{2^1}{2^1} = 2^{1-1} = 2^0$$

om räkneregeln för division av potenser går att använda även i den här situationen.

Negativa exponenter Om man fortsätter att läsa åt vänster så bör man halvera igen, så 2^{-1} bör vara hälften av $2^0 = 1$, vilket blir $1/2$. Och fortsätter man så finner man att den rimliga tolkningen är att $a^{-n} = 1/a^n$.

Basen noll Det är dock ett tal som detta inte fungerar för: talet 0. Multiplicerar man ett antal nollor så får man noll som resultat, så rad noll i tabellen innehåller enbart nollor. Men i så fall passar en etta dåligt in i positionen som motsvarar 0^0 . För tillfället löser vi det problemet genom att sätta att 0^0 får vara *odefinierat*; det går inte att säga vad det blir¹.

	0	1	2	3	...
0	?	0	0	0	...
1	1	1	1	1	...
2	1	2	4	8	...
3	1	3	9	27	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$0^{\text{negativt tal}}$ blir enligt definitionen division med noll, vilket definitivt är odefinierat (något sådant tal finns inte). ■

Vi bygger ut definitionen med detta:

Definition 5.3: Potens (version 2)

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st}} \quad \text{om } n \in \mathbb{Z}_+$
- $a^0 = 1 \quad \text{om } a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{om } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ och } a \neq 0$

Nu kan vi hantera alla sorters heltalsexponenter: positiva, negativa och noll. Finns det något vettigt sätt att definiera potenser där exponenten inte är ett heltal också?

Undersökning 5.3: Heltalsreciprok Som exponent tar vi det enklaste icke-heltalet som finns: $1/2$, och som bas provar vi med 4. Finns det något sätt att tilldela $4^{1/2}$ en innebörd som passar ihop med det som vi redan har tagit fram?

¹Det finns fler situationer där värdet 1 verkar rätt än vad det finns situationer där 0 verkar rätt, så många definierar av praktiska skäl 0^0 som 1. Men det är inte alla som håller med. Kontrollera vad man får på din miniräknare om man slår in 0^0 – det blir olika på olika märken.

Vi kan testa vad som borde hända om vi upphöjer det här talet i 2:

$$(4^{1/2})^2 = \{\text{om räknereglererna gäller}\} = 4^{(1/2) \cdot 2} = 4^1 = 4$$

Så $4^{1/2}$ ska vara ett tal som upphöjt till 2 ger 4.

Olyckligtvis finns det *två* tal som upphöjda till 2 ger 4: $2^2 = 4$ och $(-2)^2 = 4$. Vill vi att det här räknesättet ska vara en *funktion* får det bara finnas ett svar. Eftersom man oftare räknar med positiva tal än med negativa verkar det praktiskt att bestämma att det är det positiva alternativet som avses. Så vi säger att

$a^{1/n}$ är det reella tal som upphöjt i n ger a som resultat. Finns det flera sådana tal så menar vi det positiva av dem.

Tyvärr visar det sig nu att räknereglererna inte längre fungerar för alla tal:

$$((-10)^2)^{1/2} = 100^{1/2} = 10 \quad \text{men} \quad (-10)^{2 \cdot (1/2)} = (-10)^1 = -10$$

så

$$((-10)^2)^{1/2} \neq (-10)^{2 \cdot (1/2)}$$

Detta var opraktiskt. Men allt annat vi har hittat på verkar så pass bra att vi beslutar att leva med det här problemet, som bara uppkommer med negativa baser: vi säger att räknereglererna bara är garanterade för positiva baser och får användas på egen risk i övriga situationer. ■

Detta var heltalsreciprok som exponent. Med hjälp av detta och räknereglererna är det nu möjligt att beräkna potenser med vilken rationell exponent som helst:

$$4^{3/2} = 4^{(1/2) \cdot 3} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$$

Observera dock att vi inte har rätt ut vad det innebär att upphöja något i ett icke-rationellt tal, som π . Att täppa till denna sista lucka är förvånansvärt komplicerat, och ligger utanför ramarna för denna bok. (Det visar sig att det inte händer något oväntat, utan $a^\pi \approx a^{3,14159265}$, vilket förmodligen är det man tyckte att det borde bli.)

5.1.2 Sammanfattning av potensbegreppet

Det som utvecklades i föregående avsnitt kan sammanfattas så här:

Definition 5.4: Potens (version 3)

$$\bullet \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st}} \quad \text{om } n \in \mathbb{Z}_+$$

5. POTENSER

- $a^0 = 1$ om $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ om $n \in \mathbb{Z}_+$ och $a \neq 0$
- $a^{1/n}$ = det reella tal som upphöjt i n ger a . Finns det flera tal som passar in så menas det positiva av dem.

Talet a kallas för **bas**, talet n för **exponent** och konstruktionen som helhet för **potens**. Uttrycket uttalas "a upphöjt i n".

Prioritetsmässigt går potenser före de fyra räknesätten, och a^{b^c} ska tolkas som $a^{(b^c)}$.

Sats 5.1: Räkningeregler för potenser

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Reglerna är garanterade att gälla för positiva baser; används på egen risk i övrigt.

Ö5.4

Exempel 5.1: Användning av potensreglerna Åtskilliga potensuttryck kan bli lättare att beräkna med hjälp av räkningeregler:

$$2^5 \cdot 5^4 = 2^{1+4} \cdot 5^4 = 2^1 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 2 \cdot 10^4 = 20\,000$$

$$\frac{6^7}{3^8} = \frac{(2 \cdot 3)^7}{3^{1+7}} = \frac{2^7 \cdot 3^7}{3^1 \cdot 3^7} = \frac{2^7}{3}$$

Vanliga misstag

- Att använda regler som "känns bra" i stället för reglerna som de faktiskt ser ut; som att multiplicera exponenterna i stället för att addera dem då man multiplicerar två potenser.
- Att ta fel på effekterna av prioritet, och utgå från att exponenten gäller för mer än vad den gör. -2^4 betyder "upphöj 2 i 4 och byt sedan tecken"; vill man upphöja minus 2 i 4 måste man ha parentes och skriva $(-2)^4$.
- Att "bryta ut" tal från exponentuttryck så att exponenten blir kopplad till andra tal än före omskrivningen (se sidan 118).
- Att tillämpa potensreglerna för produkt och kvot på summor och differenser. $(a + b)^n$ blir inte samma sak som $a^n + b^n$, annat än i några få undantagsfall.

5.2 Rötter

Detta avsnitt fordrar att man behärskar potensbegreppet och räknereglererna för potenser.

Det finns en alternativ notation för "upphöjt i bråk":

Definition 5.5: Rötter

- $a^{1/2}$ betecknas också $\sqrt{a}$ och utläses **kvadratroten ur a** (ofta säger man bara "roten ur a "). I programmering brukar kvadratroten betecknas `sqrt(x)`, *square root*.
- $a^{1/3}$ betecknas också $\sqrt[3]{a}$ och utläses **kubikroten ur a eller tredjeveroten ur a** .
- $a^{1/n}$ betecknas också $\sqrt[n]{a}$ och utläses **n :e-roten ur a** . (n måste vara ett positivt heltal.)

Själva symbolen $\sqrt{\quad}$ kallas ett **rottecken**. ■

Normalt gäller att notationen med rottecken är lättare att läsa, medan den med exponenter är lättare att använda i beräkningar. Man behöver därför kunna byta mellan beteckningssätten.

Rötter används mycket, och det är därför viktigt att känna till deras egenskaper.

Undersökning 5.4: Egenskaper hos kvadratroten Både 2^2 och $(-2)^2$ blir 4, men $\sqrt{4} = 2$ och inget annat, eftersom "upphöjt i bråk" av entydighetsskäl är definierat som "finns det flera tal som passar in, ta det som är positivt". Man kan beskriva kvadratroten som

$\sqrt{a}$ är det *icke-negativa*² tal som i kvadrat blir a .

I situationer där man vill ha tag på *båda* de tal som i kvadrat blir a får man lägga till tecknen manuellt, och skriva $\pm\sqrt{a}$.

Det är inte alla tal som har någon kvadratroten. " $\sqrt{-4}$ " skulle betyda "det icke-negativa som i kvadrat blir -4 " och något sådant tal finns inte på tallinjen. Positiva tal i kvadrat blir positiva, negativa tal i kvadrat blir positiva ("minus gånger minus blir plus") och noll i kvadrat blir noll. Uttrycket får klassas som *odefinierat*. (Mer om den här problematiken kommer i kapitel 13, som behandlar *komplexa tal*.)

För positiva tal gäller att rot och kvadrat tar ut varandra; om $a > 0$ blir $\sqrt{a^2} = a$ och $(\sqrt{a})^2 = a$. För negativa tal är det mer komplicerat. T.ex. är $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq -4$, och $(\sqrt{-4})^2$ går inte ens att räkna ut. ■

²Att man säger *icke-negativ* och inte *positiv* är för att definitionen också ska täcka upp talet 0.

5. POTENSER

Däremot är det inga problem att beräkna en kubikrot för negativa tal; $\sqrt[3]{-8} = -2$ eftersom $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ (och det finns inget annat reellt tal som har samma kubik). Samma sak gäller för alla andra udda rötter.

Några av räkneregler för potenser ser uttryckta med rottecken ut så här:

Sats 5.2: Räkneregler för rötter

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

förutsatt att alla ingående uttryck är definierade. ■

Kommentaren om att uttrycken måste vara definierade är nödvändig eftersom det går utmärkt att beräkna $\sqrt{(-2) \cdot (-8)} = \sqrt{16} = 4$, medan $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$ blir "odefinierat gånger odefinierat", vilket inte är samma sak.

Ö5.11

Vanliga misstag

- Att även räkna det negativa svaret till frågan "vad ska vi kvadrera för att få a " som rot.
- Att utgå från att rot och kvadrat tar ut varandra.
- Och alla de fel som är vanliga vid annan potensräkning; rötter är ju ett specialfall av potenser och följer samma räkneregler.

Med hjälp av räkneregler kan man skriva om rotuttryck på många olika former.

Exempel 5.2: Omskrivningar av rotuttryck Det är ofta en fördel att uttrycka rotuttryck i rötter av så små heltal som möjligt:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

(Observera att man *inte* kan "bryta ut" 4:an ur rotuttrycket; den ingår i det som man ska ta roten ur.) Det kan underlätta förenklingar, som till exempel

$$\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Det är också ofta en fördel att *inte* ha rotuttryck i nämnaren på ett bråk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Om man vet att $\sqrt{2} \approx 1,4$ är det lätt att se att det här uttrycket blir ungefär 0,7.

Exempel 6.4 på sidan 121 innehåller ytterligare en intressant förenkling. Rotuttryck brukar kunna skrivas om på ungefär hur många sätt som helst, så om ens svar inte liknar facit ska man inte omedelbart utgå från att man har gjort fel; det kan vara olika sätt att skriva samma sak. ■

Ö5.13

På miniräknare brukar det finnas en knapp för rotberäkning, men det är inte alltid man har en räknare tillgänglig. Och det är relativt vanligt att man behöver ha tag på ett ungefärligt värde på en rot (till exempel då man ska sortera tal i storleksordning eller skissa en kurva). Det brukar inte vara speciellt svårt att uppskatta en rot med en eller två värdesiffror, vilket i sådana sammanhang är fullt tillräckligt.

Metod 5.1: Approximation av rötter Vi vill uppskatta $\sqrt{2}$ på ett ungefär.

Vi kan försöka "sikta in" oss. $1^2 = 1$, vilket är mindre än 2. $2^2 = 4$, vilket är större än 2. Vill vi få 2 bör vi lägga oss någonstans mellan 1 och 2, så vi kan prova 1,5: $1,5^2 = 2,25$, vilket är för stort men ganska nära. Vi backar lite: $1,4^2 = 1,96$, vilket är för lite men mycket nära. Så vi har nu att $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Vill man ha tag i hundradelssiffran också får man upprepa processen, men det här svaret är ofta tillräckligt bra. (Miniräknare ger approximationen $\sqrt{2} \approx 1,414213562$.) ■

Ö5.15

5.3 Potens- och exponentialfunktioner

Detta avsnitt fordrar att man behärskar potensdefinitionen och funktionsbegreppet.

Det är bra att veta på ett ungefär hur graferna för de vanligaste sorternas potensuttryck ser ut.

5.3.1 Potensfunktioner

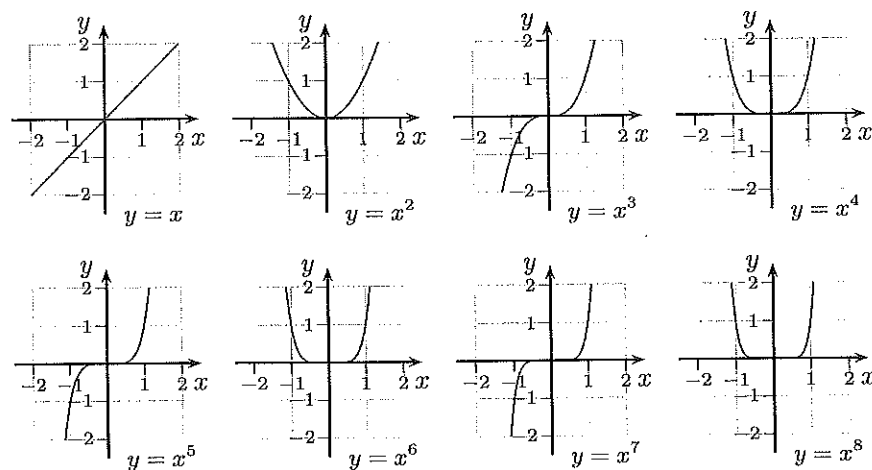
En funktion med en formel som är ett potensuttryck där man varierar *basen* och håller exponenten konstant kallas en **potensfunktion**. I figur 5.1a på nästa sida visas några potensfunktioner med positiv heltalsexponent. Ur bilden ser man ett mönster:

- $y = x^{\text{jämnt positivt heltal}}$ ser ut som en U-kurva med kröken neråt. Ju högre exponenten är, ju trubbigare är kröken och ju brantare blir sidorna.

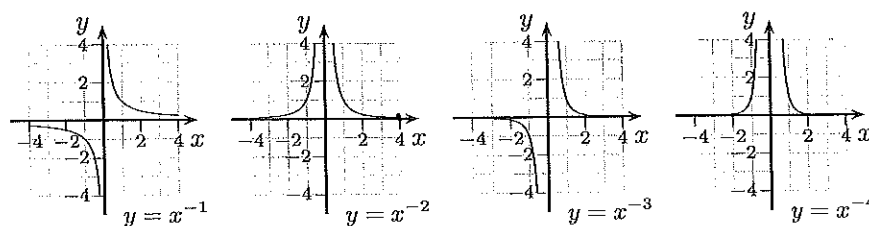
Definitionsmängden är de reella talen $\mathbb{R}$, eftersom uttrycket går att räkna ut för vilket x som helst. Värdemängden blir talen från noll och uppåt, $[0, \infty)$, eftersom vi inte får ut några negativa y -värden.

Funktionerna är *inte* injektiva, eftersom samma y -värden antas för positiva och negativa x .

5. POTENSER



(a) Positiv heltalsexponent: $x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$ och x^8 .



(b) Negativ heltalsexponent: x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} och x^{-4} .

Figur 5.1: Potensfunktioner.

- $y = x^{\text{udda positivt heltal}}$ ser ut som en S-kurva som kommer nerifrån och fortsätter uppåt. Ju högre exponenten är, ju plattare blir det vid $x = 0$ och ju brantare blir sidorna.

Både definitions- och värdemängd är $\mathbb{R}$.

Funktionerna är injektiva, för inget y -värde finns med mer än en gång på kurvan.

I figur 5.1b ovan finns graferna för några potensfunktioner med negativ heltalsexponent uppritade. Sammanfattning:

- $y = x^{\text{negativt heltal}}$ blir en kurva som består av två separata bitar, en på vardera sidan y -axeln. Då kurvan närmar sig $x = 0$ svänger den in mot y -axeln; då den avlägsnar sig från $x = 0$ svänger den in mot x -axeln. Skillnaden är att för jämna exponenter ligger båda kurvdelarna ovanför x -axeln, medan för udda den vänstra delen ligger under. Detta gör att de med udda exponent är injektiva medan de med jämn exponent inte är det.

5.3. POTENS- OCH EXPONENTIALFUNKTIONER

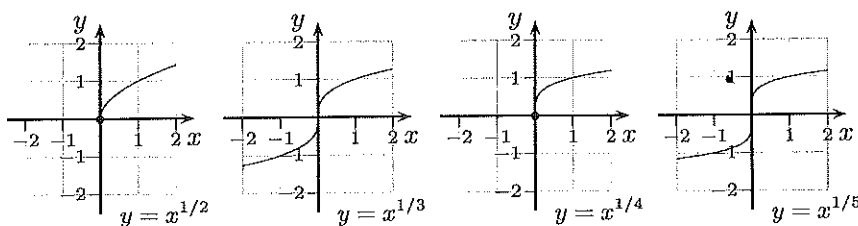
För både udda och jämna negativa exponenter är definitionsmängden allt utom 0, vilket blir unionen av de två intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. För udda exponenter är värdemängden allt utom noll, medan den för jämna är allt *över* noll.

Ö5.18

I figur 5.2 nedan ser vi exempel på några **rotfunktioner**, potensfunktioner där exponenten är en heltalsreciprok. Där är det en väsentlig skillnad på udda och jämna tal.

- $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, där n är ett *jämmt* tal, börjar vid $x = 0$. Både definitions- och värdemängd är de icke-negativa talen: intervallet $[0, \infty)$. Kurvan ser ut som en liggande variant av högerhalvan av $y = x^n$.
- $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, där n är ett *udda* tal, är definierad för alla tal och kan ge alla tal som resultat. Definitions- och värdemängd är båda $\mathbb{R}$. Kurvan ser ut som en liggande variant av $y = x^n$.

Ö5.19



Figur 5.2: Rotfunktionerna $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$ och $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$.

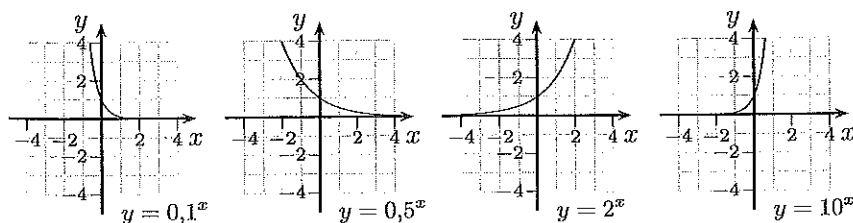
5.3.2 Exponentialfunktioner

En funktion av typen $f(x) = a^x$, där man håller basen konstant och varierar exponenten, kallas en **exponentialfunktion**. Eftersom det kan bli problem med potenser med negativ bas brukar man i de här sammanhangen alltid använda positiva baser.

Ö5.20

I figur 5.3 nedan avbildas några exponentialfunktioner med olika baser.

- $y = 1^x$ (ej med i bild) blir ett horisontellt streck på höjden $y = 1$.



Figur 5.3: Exponentialfunktionerna $(1/10)^x$, $(1/2)^x$, 2^x och 10^x .

Grundlig matematik

Inledande matematik för ingenjörer,
naturvetare och andra problemlösare

HILLEVI GAVEL