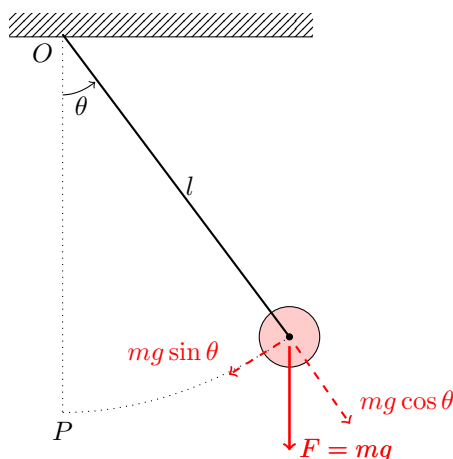


Laboration 3

Laborationen skall lösas i grupper om två och redovisas med en rapport som lämnas senast 16 oktober klockan 15 i Matematiks svarta postlåda (märkt SF) framför expeditionen på Teknikringen 8D. Se kurshemsidan för ytterligare information om rapportens utformning.

1 Matematisk pendel

En pendel bestående av en upphängning av längd l och en massa m svänger i ett plan enligt Figur 1. Om



Figur 1: En pendel av längd l och massa m .

pendelns massa antas vara punktformad och den är upphängd i en oelastisk tråd brukar den betecknas som en matematisk pendel, och dess utslagsvinkel ges då av den icke-linjära differentialekvationen

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0, \quad (1)$$

där $\theta(t)$ är utslagsvinkeln och g är tyngdaccelerationen. Om pendeln har begynnelsevillkoren

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0,$$

d v s att den släpps från en vinkel θ_0 , får svängningen periodtiden

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} I(\theta_0), \quad (2)$$

där

$$I(\theta_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}. \quad (3)$$

Låt $l=0.5$ m och $g=9.82$ m/s². (Notera: Pendelns massa påverkar inte periodtiden T .)

a) Beräkna periodtiden T för θ_0 motsvarande 5, 10, ..., 90 grader med hjälp av trapetsmetoden och gör en tabell över periodtiden för dessa vinklar. Periodtiderna ska ha åtta siffrors noggrannhet. Notera: I ekvation (3) ges vinklarna i radianer, precis som i MATLAB:s inbyggda trigonometriska funktioner.

b) För små vinklar kan man utnyttja linjäriseringen $\sin \theta \approx \theta$, vilken ger periodtiden

$$\tilde{T} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

för det linjäriserade problemet. För vilka vinklar i tabellen är det relativa felet $\frac{|T-\tilde{T}|}{T}$ mindre än en procent? Mindre än tio procent?

c) Inför en ny variabel $\nu(t) = \theta'(t)$ och skriv ekvation (1) som ett system av två första ordningens differentialekvationer. Låt begynnelsevillkoret vara $\theta_0=25^\circ$ och lös problemet med Eulers metod med steglängd $h = 0.01$ på intervallet $t \in [0, 2]$. Upprepa för $\theta_0=50^\circ$ och plotta θ som en funktion av t för de båda begynnelsevärdena. Verifiera grafiskt att periodtiderna från **a)** överensstämmer med simuleringarna.

d) För att noggrant bestämma periodtiden från simuleringen i **c)** kan man hitta tidpunkten när pendeln vänder, vilket motsvarar första tidpunkt $t > 0$ för vilken $\nu(t) = 0$. Periodtiden T är då två gånger denna tid. För $\theta_0=25^\circ$ och några värden på h , exempelvis $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, \dots$, bestäm Eulerapproximationer av T och beräkna det relativa felet i dessa approximationer genom att jämföra med resultaten från **a)**. Gör en tabell över resultaten. Hur litet h krävs för att det relativa felet ska vara mindre än en procent? Verkar felet halveras med varje halvering av h ?

Tips: För att lösa $\nu(t) = 0$ kan man leta efter tidpunkten då ν växlar tecken. Matlab-kommandot `find` kan vara användbart. Matlab-radens `i=find(v>0,1)` hittar t.ex. index på första positiva elementet i vektorn v . När man har funnit den tidpunkt där Eulerapproximationen av ν växlar tecken, dvs. $\nu_i < 0$ och $\nu_{i+1} > 0$, kan man använda linjär interpolation mellan punkterna (t_i, ν_i) och (t_{i+1}, ν_{i+1}) för att bestämma skärningspunkten med t -axeln.