

Laboration 2

Laborationen skall lösas i grupper om två till tre och redovisas individuellt genom en lappskrivning den 5/10. Utskrifter av kod och resultat är tillåtet hjälpmedel på skrivningen.

1 Icke-linjär ekvation

Funktionen

$$f(x) = 2xe^{x-1} - (x^2 + 2x - 1) \quad (1)$$

är given. Er uppgift är att bestämma funktionens rötter, med hjälp av tre olika metoder:

- bisektionsmetoden,
- Newtons metod, och
- fixpunktsmetoden med

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{2(e^{x-1} - 1)}. \quad (2)$$

Låt e_k beteckna felet efter k iterationer. Eftersom rötterna inte är kända, använder vi approximationen $|e_k| \approx |x_k - x_{k-1}|$, där x_k är lösningen efter k iterationer.

- a) Plotta funktionen på intervallet $[-3, 3]$ och uppskatta rötternas läge. Motivera varför funktionen inte kan ha fler rötter än de funna.
- b) För vilken/vilka rötter konvergerar bisektionsmetoden? Motivera ditt svar.
- c) Bestäm med vardera metod roten nära -2.5 . Använd stoppvillkor $|e_k| < 10^{-6}$ och startgissning $x_0 = -2.5$ för Newtons metod och fixpunktsmetoden, samt intervallet $[-2.5, -2.25]$ för bisektionsmetoden. Ange hur många iterationer som krävs för konvergens:

Metod	k
Bisektionsmetoden	
Newtons metod	
Fixpunktsmetoden	

- d) Härled på papper varför fixpunktsmetoden ej konvergerar för denna rot.
- e) Visa att $x = 1$ är en rot. Tillämpa Newtons metod och fixpunktsmetoden för denna rot, med startgissning $x_0 = 1.25$ och samma tolerans som tidigare. Hur många iterationer krävs för konvergens?

Metod	k
Newtons metod	
Fixpunktsmetoden	

- f) Skriv kod för att skapa en tabell över $|e_k|/|e_{k-1}|$ och $|e_k|/|e_{k-1}|^2$, $k = 1, 2, \dots$. För vardera metod, använd tabellen för att bestämma om den konvergerar linjärt eller kvadratisk för roten $x = 1$.
- g) Visa på papper varför Newtons metod konvergerar långsammare än fixpunktsmetoden för denna rot.

2 Interpolation

Er uppgift är att bestämma hur olika interpolationsmetoder beter sig för funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8(x - \frac{1}{9})^2}}. \quad (3)$$

Undersök RMS-felet

$$\text{RMSE} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|e\|_2, \quad (4)$$

där $e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ och $e_i = y_i - f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Här är n är antalet punkter och y_i är interpolantens värde i punkten x_i . Låt punkterna vara givna av $x_i = -2 + \frac{4(i-1)}{n-1}$. Notera att $h = x_{i+1} - x_i = \frac{4}{n-1}$.

- Skriv MATLAB-kod för att bestämma ett interpolerande polynom av högsta gradtal för ett givet n , genom att ställa upp Vandermondematrisen och lösa ekvationssystemet för polynomets koefficienter. *Tips:* Se `help vander`.
- Använd `interp1`, `spline` och din kod från a) för att bestämma tre interpolanter med $n = 7$ och plotta dessa tillsammans med funktionen och interpolationspunkterna.
- För de tre metoderna i b), beräkna interpolanter för $n = 6$, $n = 11$ och $n = 21$. Utvärdera vardera interpolant i 100 eller 200 jämnt fördelade punkter och beräkna RMS-felet. *Notera:* Längden på vektorn bestämmer n i formeln för RMS-felet. Ange felet i tabellen nedan:

Metod	RMSE ($n = 6$)	RMSE ($n = 11$)	RMSE ($n = 21$)
Polynom av högsta gradtal			
Linjär interpolation			
Kubisk spline			

- För vardera metod, plotta felet som en funktion av h med lämplig skala på axlarna.
- Förklara varför felet vid interpolation med polynom av högsta gradtal ökar när h minskar.
- Linjär interpolation och kubiska splines bör ge ett fel som följer $\text{RMSE} \approx Ch^p$, där C och p är konstanter och h är avståndet mellan interpolationspunkterna. För vardera metod, använd värden på n från 6 till 30 för att uppskatta p med en lämplig linjär anpassning, eller genom en grafisk skattning. Utnyttja samma fina nät som tidigare för att beräkna felet i interpolanten. Stämmer konvergensordningen med teorin?

3 Integration

Integralen

$$I = \int_0^5 e^{\sin x} dx \quad (5)$$

ska bestämmas. Låt $x_i = \frac{5(i-1)}{n-1}$, $i = 1, \dots, n$, och notera att $h = \frac{5}{n-1}$.

- Implementera trapetsmetoden och Simpsons metod (för udda n) i MATLAB.

Metod	$ \tilde{I}_{11} - I $	$ \tilde{I}_{21} - I $	$ \tilde{I}_{41} - I $
Trapetsmetoden			
Simpsons metod			

- b) Använd **integral** för att beräkna ett referensvärde I för integralen, och bestäm absolutfelet för de båda metoderna för $n = 11, 21, 41$. Ange felen i tabellen nedan:
- c) Beräkna Richardsonextrapolationen från trapetsmetoden med $h = 1/2$ och $h = 1/4$, och verifiera att den ger samma resultat som Simpsons metod för $h = 1/2$.
- d) Absolutfelet bör följa $e = Ch^p$. För vardera metod, använd $n = 11, 21, 41, 81$ för att uppskatta p med en lämplig linjär anpassning, eller genom en grafisk skattning. Stämmer konvergensordningen med teorin?

För att beräkna generaliserade integraler av formen

$$I = \int_a^\infty f(x) \, dx, \quad (6)$$

med vanliga numeriska metoder, kan man använda den trigonometriska substitutionen

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_{\arctan(a)}^{\pi/2} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} \, dx. \quad (7)$$

Detta kräver dock metoder som inte evaluerar integranden i ändpunkterna av intervallet (*Varför?*). En sådan metod är mittpunktsformeln

$$I = \int_a^b f(x) \, dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (8)$$

där $h = \frac{b-a}{n}$ och $x_i = a + (i - 1/2)h$, $i = 1, \dots, n$.

- e) Implementera mittpunktsformeln i MATLAB.
- f) Beräkna med denna formel

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad (9)$$

för $\alpha = \frac{3}{2}, 2, 3$ med $n = 10, 20, 40, \dots$. Jämför med det exakta värdet $\frac{1}{\alpha-1}$. För vilka α konvergerar metoden snabbt?

- g) Förklara varför den trigonometriska substitutionen endast fungerar väl för $\alpha \geq 2$. *Tips:* Sätt in substitutionen i $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ och förenkla integranden. Vad händer i närheten $\pi/2$ för olika värden av α ?
- h) Bestäm metodens konvergensordning för $\alpha = 2$.