Fusionsplasmafysik
Elektroteknik och datavetenskap
KTH, Teknikringen 29
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 8.00 - 12.00 tisdagen den 22 oktober 2021

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Tentamen består av åtta uppgifter:

- sex grundläggande uppgifter, ett problem för varje lärandemål (ILO)
- två mer avancerade uppgifter.

Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p.
För att nå betyget E på tentamen måste studenten uppfylla alla sex lärandemål (ILO). Ett lärandemål uppfylls om studenten får minst 1,5 poäng på motsvarande uppgift på tentamen (eller blivit godkänd på motsvarande moment i den löpande examinationen).

BETYG	POÄNG
E	1.5 poäng för varje lärandemål (från motsvarande uppgifter i tentamen eller från löpande examination), svarande mot 9 poäng
D	som "E" men minst 12 poäng (=3 poäng mer än E) från valfria uppgifter i tentamen
C	som "E" men minst 15 (=6 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen
B	som "E" men minst 18 (=9 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från ett av de avancerade problemen
A	som "E" men minst 21 (=12 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från varje avancerat problem

Miniräknare är *ej tillåten.*
Tillåtet:

- "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- "BETA Mathematics Handbooks for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- vektoralgebra + kroklinjiga koord-system formler.
- mobiltelefon: endast som kamera eller för att skanna lösningen
- PC: bara för att läsa texten av tentamen från CANVAS eller ladda upp dina skannade lösningar till CANVAS
- du kan läsa de detaljerade instruktionerna på denna länken i CANVAS.

Lärare:

- Lorenzo Frassinetti
- Erik Saad
- Björn Ljungberg
- Hampus Nyström
- Laura Dittrich

GRUNDLÄGGANDE UPPGIFTER

(1) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

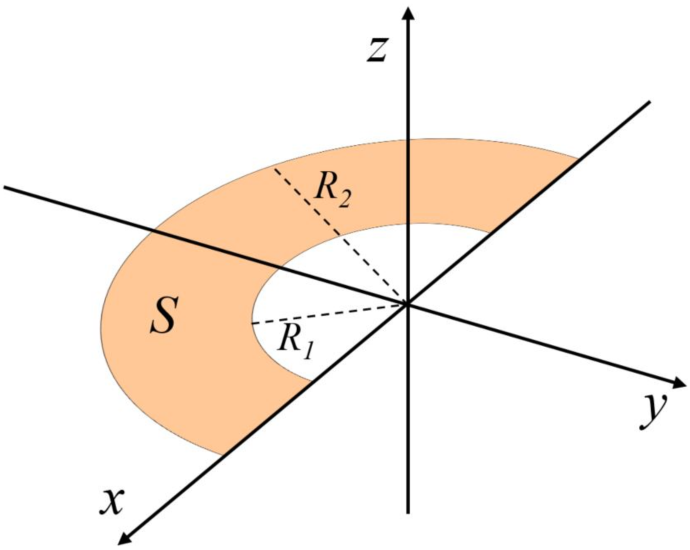
$\overline{E}(\overline{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\overline{r}$. Fältets källa är en yta, S, med konstant laddningstäthet σ_0. Under dessa förutsättningar beräknas $\overline{E}(\overline{r})$ som:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\overline{r}-\overline{r}\,')\sigma_0 dS'}{|\overline{r}-\overline{r}\,'|^3}$$

där

- dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)
- $\overline{r}\,'$ är en vektor från origo till dS',
- $\overline{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\overline{E}$).

Betrakta den ytan S som definieras som en del av en cirkel som ligger i xy-planet och $y \le 0$, med centrum i origo och definieras mellan radier R_1 och R_2.
Se figur.



(a) Betrakta det elektriska fältet $\bar{E}$ **<u>längs y-axeln</u>.**
Uttryck dessa storheter till det givna problemets geometri:

dS' **(0,20p)**

$\bar{r}'$ **(0,20p)**

$\bar{r}$ **(0,20p)**

$|\bar{r} - \bar{r}'|^3$ **(0,40p)**

(b) Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ **<u>i origo</u>**. **(2,0p)**

---

(2) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

Betrakta vektorfältet $\bar{A}$:

$$\bar{A} = x^2\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y$$

och kurvan L:

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{3z^2}{4} = 4 \\ y = z \\ y \geq 0 \\ från\ punkten\ A: (-2,0,0)\ till\ punkten\ B: (2,0,0) \end{cases}$$

(a) Skriv en parametrisering av kurvan L **(1,0p)**

(b) Beräkna linjeintegralen $\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$. **(2,0p)**

---

(3) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

(a) Bevisa Gauss sats **(1,0p)**

(b) Betrakta följande vektorfält:

$$\bar{A} = x\hat{e}_x + (x^2 + z^2)\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

och den öppna ytan S som definieras av:

$$S: \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1 \\ y < -1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y = 1\ i\ punkten\ P: (0, -2, 0) \end{cases}$$

Beräkna

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

(2,0p)

---

(4) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

Elliptiska koordinater μ, ν, z definieras av:

$$\begin{cases} x = \cosh\mu\cos\nu \\ y = \sinh\mu\sin\nu \\ z = z \\ \text{med } \mu > 0 \text{ och } 0 \leq \nu < 2\pi \end{cases}$$

där $\cosh\mu$ och $\sinh\mu$ är hyperboliska cosinus och sinus och definieras av

$$\cosh\mu = \frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{2}$$
$$\sinh\mu = \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{2}$$

(a) Beräkna basvektorerna $\hat{e}_\mu$, $\hat{e}_\nu$, $\hat{e}_z$ i ett elliptiskt koordinatsystem. **(1p)**

(b) Visa om det elliptiska koordinatsystemet är ortonormerat **(0,5p)**

(c) Uttryck gradienten av ett skalarfält ϕ i ett elliptiskt koordinatsystem. **(0,75p)**

(d) Beräkna gradienten av skalarfältet

$$\phi = \mu\nu^2$$

i ett elliptiskt koordinatsystem. **(0,75p)**

---

(5) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

(a) Visa med nablaräkning eller indexräkning att

$$\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$$ **(1,0p)**

(b) Betrakta vektorfältet

$$\bar{A} = \bar{A}_0 \sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$$

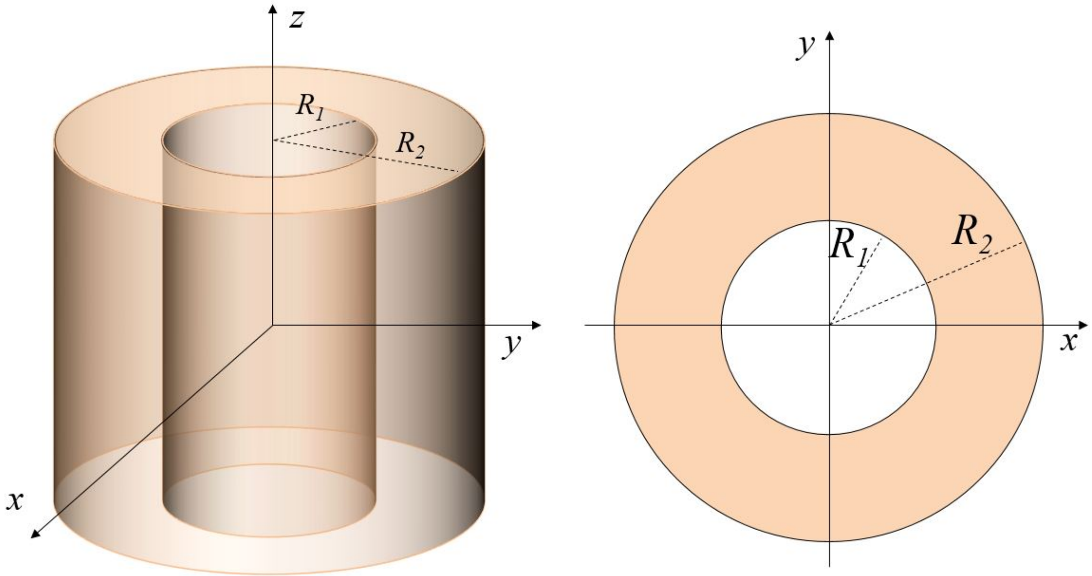
där $\bar{A}_0$ och $\bar{k}$ är två konstanta vektorer och $\bar{r}$ är ortsvektorn.

Visa att $\nabla \cdot (\bar{r} \times \bar{A}) = \bar{r} \cdot (\bar{A}_0 \times \bar{k}) \cos(\bar{k} \cdot \bar{r})$ **(2,0p)**

---

(6) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

Betrakta ett tjockt och oändligt långt cylindriskt skal med axeln längs z-axeln, inre radie R_1 och yttre radie R_2. Se figur. Skalet har en konstant volymladdningstäthet $\rho_c = k$. Det finns ingen laddning i $\rho < R_1$ och $\rho > R_2$.



3D-vy tvärsnitt i xy planet

Antag att:

(1) den elektrostatiska potentialen längs z-axeln är V_0

Från teoretisk elektroteknik och symmetri vet vi att:

(2) det elektrostatiska fältet längs z-axeln är noll

(3) det elektrostatiska fältet är kontinuerligt på den inre ytan av skalet (i $\rho = R_1$) och på den yttre ytan av skalet (i $\rho = R_2$)

(4) den elektrostatiska potentialen är kontinuerlig på den inre ytan av skalet (i $\rho = R_1$) och på den yttre ytan av skalet (i $\rho = R_2$)

Betrakta Poissons ekvation:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$ (där ε_0 är en konstant)

(a) Skriv ner Poissons ekvation i ett lämpligt koordinatsystem. **(0,2p)**

(b) Utnyttja problemets symmetri för att förenkla ekvationen. **(0,2p)**

(c) Skriv ner de matematiska uttrycken för alla randvillkor. **(0,2p)**

(d) Använd ekvationen från (b) och randvillkoren från (c) för att beräkna den elektrostatiska potentialen V **och** det elektrostatiska fältet $\overline{E} = -\nabla V$ i områdena:

- $\rho < R_1$
- $R_1 < \rho < R_2$
- $\rho > R_2$

(2,0p)

(e) Rita ut potentialen och det elektriska fältet. **(0,4p)**

AVANCERADE UPPGIFTER

----

(7) UPPGIFT 7

Betrakta vektorfältet $\bar{A}$ som definieras i ett cylindriskt koordinatsystem:

$$\bar{A} = \left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho}\right)\hat{e}_\varphi$$

och den öppna kurvan L är som definieras av:

$$L: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(y+1)^2}{b^2} = 1 \\ y \geq -1 \\ z = 0 \\ b > 1 \\ \text{orientering definieras som } +\hat{e}_x \text{ i punkten } P: x = 0, y = b - 1, z = 0 \end{cases}$$

Beräkna linjeintegralen:

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$$

(3p)

----

(8) UPPGIFT 8

Beräkna ökningen per längdenhet i riktningen $\hat{e}_r + \hat{e}_\varphi$ av skalärfältet ϕ som definieras av:

$$\phi = z\,\nabla \cdot \big((\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{r}\big)$$

där $\bar{a}$ är en konstant vektor, $\bar{r}$ är ortsvektorn, $\hat{e}_r$ och $\hat{e}_\varphi$ är basvektorerna i ett sfäriskt koordinatsystem och x, y, z är variablerna i ett kartesiskt koordinatsystem.

(3p)

SOLUTIONS

---

(1) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

(a)

$$
\begin{aligned}
&dS' = \rho' d\rho' d\varphi' \\
&\bar{r}' = \rho' \hat{e}_\rho \\
&\bar{r} = y\hat{e}_y \\
&\bar{r} - \bar{r}' = y\hat{e}_y - \rho'\hat{e}_\rho \\
&|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{y^2 + \rho'^2 - 2y\rho'\hat{e}_y \cdot \hat{e}_\rho} = \sqrt{y^2 + \rho'^2 - 2y\rho' sin\varphi} \\
&|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = (y^2 + \rho'^2 - 2y\rho' sin\varphi)^{3/2}
\end{aligned}
$$

$$\int_\pi^{2\pi} \hat{e}_\rho \, d\varphi' = \int_\pi^{2\pi} \left(cos\varphi'\hat{e}_x + sin\varphi'\hat{e}_y\right) d\varphi' = -2\hat{e}_y$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\bar{E}(\bar{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{(\bar{r} - \bar{r}')\sigma_0 dS'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_\pi^{2\pi} \frac{-\rho'\hat{e}_\rho}{\rho'^3} \rho' d\varphi' d\rho' = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_\pi^{2\pi} \frac{\hat{e}_\rho}{\rho'} d\varphi' d\rho' \\
&= -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_\pi^{2\pi} \frac{cos\varphi'\hat{e}_x + sin\varphi'\hat{e}_y}{\rho'} d\varphi' d\rho' = \frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\hat{e}_y}{\rho'} d\rho' = \frac{\sigma_0 \hat{e}_y}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}
\end{aligned}
$$

---

(2) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

(a) Skriv en parametrisering av kurvan L

$$y = z \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{3y^2}{16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\begin{cases} x = 2cos\varphi \\ y = 4sin\varphi \\ z = 4sin\varphi \end{cases}$$

$$från\ punkten\ A: (-2{,}0{,}0) \implies \varphi = -\pi$$

$$till\ punkten\ B: (2{,}0{,}0) \implies \varphi = 0$$

Parametrisering:

$\bar{r}(\varphi) = (2cos\varphi, 4sin\varphi, 4sin\varphi)$
Med $\varphi: \pi \to 0$

(b) Beräkna linjeintegralen $\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$.

$$\bar{A} = x^2\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y \Longrightarrow \bar{A}(\varphi) = 4cos^2\varphi\hat{e}_x + 16sin^2\varphi\hat{e}_y$$
$$\frac{d\bar{r}}{d\varphi} = (-2sin\varphi, 4cos\varphi, 4cos\varphi)$$

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_\pi^0 \bar{A}(\varphi) \cdot \frac{d\bar{r}}{d\varphi} d\varphi$$
$$= \int_\pi^0 (4cos^2\varphi, 16sin^2\varphi, 0) \cdot (-2sin\varphi, 4cos\varphi, 4cos\varphi) d\varphi$$
$$= \int_\pi^0 (-8sin\varphi cos^2\varphi + 64cos\varphi sin^2\varphi) d\varphi = \left[\frac{8}{3}cos^3\varphi + \frac{64}{3}sin^3\varphi\right]_\pi^0$$
$$= \frac{16}{3}$$

---

(3) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

(a) See theorem 8.1 in the book

(b) We cannot apply the Gauss'theorem directly, because the surface is open. But we can close the surface adding a surface S_0 which would be a circle parallel to the xz-plane with radius 1 and centered in (0,-1,0).

$$\iint_{-S+S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \bar{A}) dV$$
$$\iint_{-S+S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} = -\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} + \iint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

Note that we are using –S, not S because we want that the normal of $-S+S_0$ to point "outwards"

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} - \iint_{-S+S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} - \iiint_V (\nabla \cdot \bar{A}) dV$$

Let's calculate the two integrals:

First integral:

$$\iint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_0} \bar{A} \cdot \hat{e}_y dS = \iint_{S_0} A_y dS = \iint_{S_0} (x^2 + z^2) dS = \iint_{S_0} \rho^2 dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 d\rho d\varphi = 2\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Second integral

$$(\nabla \cdot \bar{A}) = 2$$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A}) dV = \iiint_V 2dV = 2 \iiint_V dV = \frac{4}{3}\pi$$

(the volume V is the volume of half sphere with radius 1. So $V = \frac{2}{3}\pi$)

So, the final integral is

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} - \iiint_V (\nabla \cdot \bar{A}) dV = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\pi = -\frac{5}{6}\pi$$

---

(4) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

$$\begin{cases} x = \cosh\mu \cos\nu \\ y = \sinh\mu \sin\nu \\ z = z \\ med\ \mu > 0\ och\ 0 \le \nu < 2\pi \end{cases}$$

(a)

$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\right)$ with $h_i = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\right|$

$$\bar{r} = \cosh\mu \cos\nu\, \hat{e}_x + \sinh\mu \sin\nu\, \hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu} = \sinh\mu \cos\nu\, \hat{e}_x + \cosh\mu \sin\nu\, \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad h_\mu = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu}\right| = \sqrt{(\sinh\mu\cos\nu)^2 + (\cosh\mu\sin\nu)^2} = \sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \nu} = -\cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_x + \sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad h_\nu = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \nu}\right| = \sqrt{(-\cosh\mu\sin\nu)^2 + (\sinh\mu\cos\nu)^2} = \sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \hat{e}_z \qquad \Rightarrow \quad h_z = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial z}\right| = 1$$

$$\hat{e}_\mu = \frac{\sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_x + \cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_y}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}$$

$$\hat{e}_\nu = \frac{-\cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_x + \sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_y}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}$$

$$\hat{e}_z = \hat{e}_z$$

(b)

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \frac{\sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_x + \cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_y}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}} \cdot \frac{-\cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_x + \sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_y}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}} = 0$$

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_z = \frac{\sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_x + \cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_y}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}} \cdot \hat{e}_z = 0$$

$$\hat{e}_z \cdot \hat{e}_\nu = \hat{e}_z \cdot \frac{-\cosh\mu\sin\nu\,\hat{e}_x + \sinh\mu\cos\nu\,\hat{e}_y}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}} = 0$$

$$\left|\hat{e}_\mu\right| = 1$$

$$|\hat{e}_\nu| = 1$$

$$|\hat{e}_z| = 1$$

It is orthonormal.

(c)

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_\mu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\right)\hat{e}_\mu + \frac{1}{h_\nu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\hat{e}_\nu + \frac{1}{h_z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\right)\hat{e}_\mu + \frac{1}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\hat{e}_\nu + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_z$$

(d)

$\phi = \mu\nu^2$

$$\nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}\left(\frac{\partial(\mu\nu^2)}{\partial\mu}\right)\hat{e}_\mu + \frac{1}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}\left(\frac{\partial(\mu\nu^2)}{\partial\nu}\right)\hat{e}_\nu + \left(\frac{\partial(\mu\nu^2)}{\partial z}\right)\hat{e}_z =$$

$$= \frac{\nu^2}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}\hat{e}_\mu + \frac{2\mu\nu}{\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}}\hat{e}_\nu$$

---

(5) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

(a) For nablaräkning, see page 221 in the book.

For indexräkning, see problem 12.4 in the book.

(b) $\bar{A} = \bar{A}_0 \sin(\bar{k}\cdot\bar{r})$

Note that $\bar{k}\cdot\bar{r} = (k_x x + k_y y + k_z z)$

$\nabla\cdot(\bar{r}\times\bar{A}) = \bar{A}\cdot(\nabla\times\bar{r}) - \bar{r}\cdot(\nabla\times\bar{A})$

$\nabla\times\bar{r} = 0$

$$\nabla\times\bar{A} = \nabla\times\left(\bar{A}_0\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})\right) = (\nabla\times\bar{A}_0)\sin(\bar{k}\cdot\bar{r}) + \left(\nabla(\sin(\bar{k}\cdot\bar{r}))\right)\times\bar{A}_0$$
$$= (\bar{k}\times\bar{A}_0)\cos(\bar{k}\cdot\bar{r})$$

$\nabla\times\bar{A}_0 = 0$ because $\bar{A}_0$ is a constant vector.
$\nabla(\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})) = \bar{k}\cos(\bar{k}\cdot\bar{r})$

So, we have:
$\nabla\cdot(\bar{r}\times\bar{A}) = \bar{r}\cdot(\bar{A}_0\times\bar{k})\cos(\bar{k}\cdot\bar{r})$

---

(6) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

(a)

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

(b) due to the symmetry of the problem the derivatives in φ and z are zero. So, the equation can be simplified to

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

(c) there are three regions: $\rho < R_1,\ \ R_1 < \rho < R_2,\ \ \rho > R_2$. We can label the solutions to the Poisson's equation as
V_1, for $\rho < R_1$
V_2, for $R_1 < \rho < R_2$
V_3, for $\rho > R_2$
and the corresponding electric field $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$.

The boundary conditions are:

(1) $V_1(0) = V_0$
(2) det elektrostatiska fältet längst z-axeln är noll
$\bar{E}_1(0) = \bar{0}$
(3) det elektrostatiska fältet är kontinuerlig på den inre ytan av skalen (i $\rho = R_1$) och på den yttre ytan av skalen (i $\rho = R_2$)
$\bar{E}_1(R_1) = \bar{E}_2(R_1)$
$\bar{E}_2(R_2) = \bar{E}_3(R_2)$

(4) den elektrostatiska potentialen är kontinuerlig på den inre ytan av skalen (i $\rho = R_1$) och på den yttre ytan av skalen (i $\rho = R_1$)
$V_1(R_1) = V_2(R_1)$
$V_2(R_2) = V_3(R_2)$

(d) First of the, the electric field can be calculated from the gradient:

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho$$

The phi and z components are zero due to symmetry.

Inside the inner radius, $\rho < R_1$

Here there is no charge, so we have to solve the Laplace equation whose general solution is:

$V_1 = aln\rho + b$

Then, the corresponding electric field is
$\bar{E}_1 = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{e}_\rho = \frac{a}{\rho}\hat{e}_\rho$

From boundary condition (2), $\bar{E}_1(0) = \bar{0}$, we obtain a=0.
From boundary condition (1), $V_1(0) = V_0$, we obtain $b = V_0$.
So, inside the inner radius:

$V_1(\rho) = V_0$
$\bar{E}_1(\rho) = \bar{0}$

Inside the shell, $R_1 < \rho < R_2$
The charge density is constant. We have to solve the equation:

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = -\frac{k}{\varepsilon_0}$ for simplicity, let's call $k_0 = -\frac{k}{\varepsilon_0}$

By integrating, we obtain:

$V_2 = \frac{k_0}{4}\rho^2 + cln\rho + d$
$\bar{E}_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial \rho}\hat{e}_\rho = \left(-\frac{k_0}{2}\rho - \frac{c}{\rho}\right)\hat{e}_\rho$

From boundary conditions at $\rho = R_1$, we obtain:

$$\bar{E}_2(R_1) = \bar{E}_1(R_1) = \bar{0} \;\Rightarrow\; -\frac{k_0}{2}R_1 - \frac{c}{R_1} = 0 \Rightarrow\; c = -\frac{k_0}{2}R_1^2$$
$$V_2(R_1) = V_1(R_1) = V_0 \;\Rightarrow\; \frac{k_0}{4}R_1^2 - \frac{k_0}{2}R_1^2 lnR_1 + d = V_0 \;\Rightarrow\; d = V_0 - \frac{k_0}{4}R_1^2 + \frac{k_0}{2}R_1^2 lnR_1$$

So, field and potential in this region are:

$$V_2 = V_0 - \frac{k_0}{4}R_1^2 + \frac{k_0}{2}R_1^2 lnR_1 + \frac{k_0}{4}\rho^2 - \frac{k_0}{2}R_1^2 ln\rho = V_0 + \frac{k_0}{4}(\rho^2 - R_1^2) + \frac{k_0}{2}R_1^2 ln\frac{R_1}{\rho}$$
$$\bar{E}_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial \rho}\hat{e}_\rho = \frac{k_0}{2}\left(\frac{R_1^2 - \rho^2}{\rho}\right)\hat{e}_\rho$$

Outside the outer radius, r>R_2
there is no charge, so we have to solve the Laplace equation whose general solution is:

$$V_3 = e ln\rho + f$$

$$\bar{E}_3 = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{e}_\rho = -\frac{e}{\rho}\hat{e}_\rho$$

Due to the boundary condition $\rho = R_2$, we obtain:

$\bar{E}_3(R_2) = \bar{E}_2(R_2)$
$V_3(R_2) = V_2(R_2)$

$$-\frac{e}{R_2} = \frac{k_0}{2}\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2}\right) \Rightarrow \ e = \frac{k_0}{2}(R_2^2 - R_1^2)$$

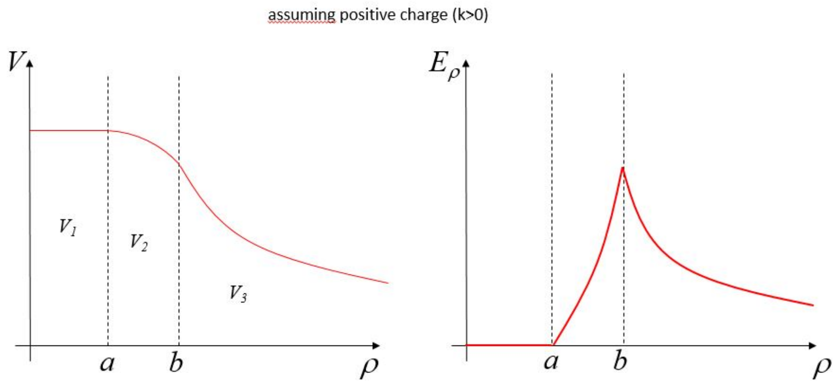
$$\frac{k_0}{2}(R_2^2 - R_1^2)lnR_2 + f = V_0 + \frac{k_0}{4}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{k_0}{2}R_1^2 ln\frac{R_1}{R_2} \ \Rightarrow \ f$$
$$= V_0 + \frac{k_0}{4}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{k_0}{2}R_1^2 ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{k_0}{2}(R_2^2 - R_1^2)lnR_2$$

So, field and potential in this region are:

$$V_3 = \frac{k_0}{2}(R_2^2 - R_1^2)ln\rho + f$$

$$\bar{E}_3 = -\frac{k_0}{2\rho}(R_2^2 - R_1^2)\hat{e}_\rho$$

(e)

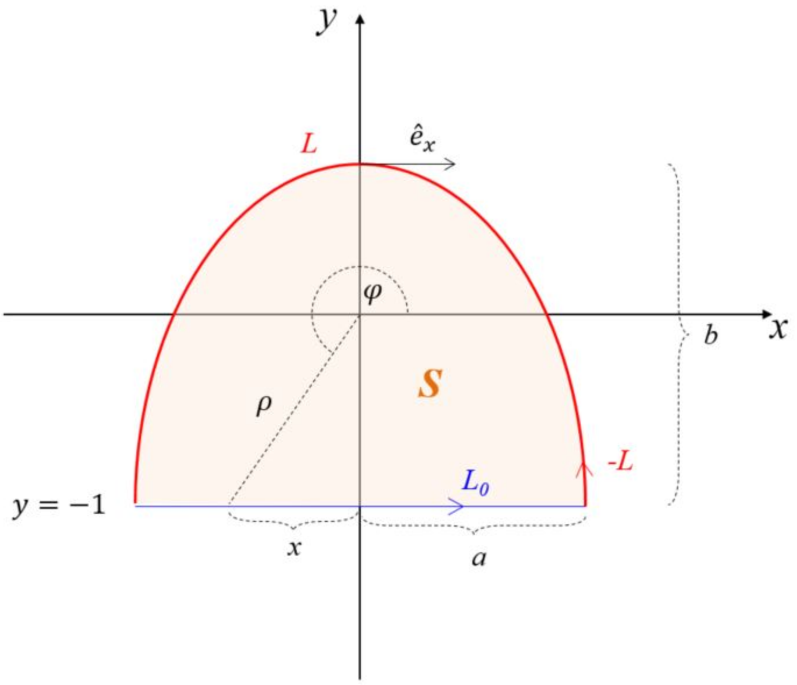


---

(7) UPPGIFT 7

The integral cannot be solved easily with the parameterization of the curve, since the curve is an ellipsis. Moreover, we cannot use the Stokes' theorem, because the curve is open.

We can consider the closed curve defined as $-L+L_0$ (see figure) and apply the Stokes' theorem. Note we use $-L$, to have the curve oriented anti-clockwise when looking down from the positive z-axis.
The field is not continuous on the z-axis, so we need to re-arrange the vector field in order to apply theorem 16.2 and then the Stokes theorem:



$$\oint_{-L+L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \oint_{-L+L_0} \left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right)\hat{e}_\varphi \cdot d\bar{r} = \underbrace{\oint_{-L+L_0} \frac{1}{\rho}\hat{e}_\varphi \cdot d\bar{r}}_{\substack{=2\pi \\ theroem\ 16.2}} + \oint_{-L+L_0} \rho\hat{e}_\varphi \cdot d\bar{r} = 2\pi + \iint_S (\nabla\times\rho\hat{e}_\varphi)\cdot d\bar{S}$$

$$\oint_{-L+L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r} = -\int_L \bar{A}\cdot d\bar{r} + \int_{L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r}$$

So we have that:

$$\int_L \bar{A}\cdot d\bar{r} = +\int_{L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r} - 2\pi - \iint_S (\nabla\times\rho\hat{e}_\varphi)\cdot d\bar{S}$$

To calculate the first integral, L_0 can be parameterized by

$$L_0\colon \begin{cases} \bar{r} = (x,-1,0) \\ x\colon -a \to a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d\bar{r} = \hat{e}_x dx$$

$$\int_{L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_{L_0} \left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right)\underbrace{\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_x}_{-sin\varphi} dx = -\int_{L_0} \left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right) sin\varphi dx =$$

From the geometry of the curve, we get that:

$$sin\varphi = -\frac{1}{\rho}$$

and $\rho^2 = 1 + x^2$. So the integral is

$$= -\int_{L_0} \left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right) sin\varphi dx = \int_{L_0} \left(\frac{\rho^2+1}{\rho^2}\right) dx = \int_{L_0} \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) dx = \int_{-a}^{+a} \left(1+\frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= [x + \operatorname{atan} x]_{-a}^{a} = 2a + 2\operatorname{atan} a$$

To calculate the second integral:

$$(\nabla \times \rho\hat{e}_\varphi) = 2\hat{e}_z$$

$$\iint_S (\nabla \times \rho\hat{e}_\varphi) \cdot d\bar{S} = \iint_S 2\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z dS = 2\iint_S dS = 2S = 2\frac{\pi ab}{2} = \pi ab$$

So, the integral is:

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = +\int_{L_0} \bar{A} \cdot d\bar{r} - 2\pi - \iint_S (\nabla \times \rho\hat{e}_\varphi) \cdot d\bar{S} = 2a + 2\operatorname{atan} a - 2\pi - \pi ab$$

---

(8) UPPGIFT 8

First, let's simplify the divergence:

$$\nabla \cdot ((\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{r}) = +\bar{r} \cdot \nabla \times (\bar{a} \times \bar{r}) - (\bar{a} \times \bar{r}) \cdot \underbrace{(\nabla \times \bar{r})}_{=0} = \bar{r} \cdot \nabla \times (\bar{a} \times \bar{r})$$

$$= \bar{r} \cdot \left[\underbrace{(\bar{r} \cdot \nabla)\bar{a}}_{=0} - \underbrace{(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{r}}_{=\bar{a}} + \bar{a}\underbrace{(\nabla \cdot \bar{r})}_{=3} - \bar{r}\underbrace{(\nabla \cdot \bar{a})}_{=0}\right] = 2\bar{r} \cdot \bar{a}$$

So, since $z = rcos\theta$, we obtain:

$$\phi = z\,\nabla \cdot ((\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{r}) = 2rcos\theta\, \bar{r} \cdot \bar{a}$$

$\hat{e}_\theta + \hat{e}_\varphi$ av skalärfältet ϕ som definieras av:

The increase per unit length is given by the directional derivative:

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \hat{n}$$

The gradient can be calculated as follows:

$$\nabla\phi = \nabla(2rcos\theta\,\bar{r}\cdot\bar{a}) = \underbrace{\nabla(2rcos\theta)}_{2cos\theta\hat{e}_r - 2sin\theta\,\hat{e}_\theta}(\bar{r}\cdot\bar{a}) + 2rcos\theta\underbrace{\nabla(\bar{r}\cdot\bar{a})}_{=\bar{a}} =$$
$$= 2cos\theta\hat{e}_r(\bar{r}\cdot\bar{a}) - 2sin\theta\,\hat{e}_\theta(\bar{r}\cdot\bar{a}) + 2rcos\theta\bar{a}$$

Because:

$$\nabla(\bar{r}\cdot\bar{a}) = \nabla(xa_x + ya_y + za_z) = \bar{a}$$

and

$$\nabla(2rcos\theta) = \frac{\partial 2rcos\theta}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial 2rcos\theta}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial 2rcos\theta}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi = 2cos\theta\hat{e}_r - 2sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

The normalized direction is

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_r + \hat{e}_\varphi}{\sqrt{2}}$$

So, the increase per unit length is

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\hat{n} = (2cos\theta\hat{e}_r(\bar{r}\cdot\bar{a}) - 2sin\theta\,\hat{e}_\theta(\bar{r}\cdot\bar{a}) + 2rcos\theta\bar{a})\cdot\frac{\hat{e}_r + \hat{e}_\varphi}{\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{2}(cos\theta(\bar{r}\cdot\bar{a}) + rcos\theta\hat{e}_r\cdot\bar{a} + rcos\theta\bar{a}\cdot\hat{e}_\varphi)$$
$$= \sqrt{2}(cos\theta(\bar{r}\cdot\bar{a}) + cos\theta(\bar{r}\cdot\bar{a}) + rcos\theta\bar{a}\cdot\hat{e}_\varphi) =$$

$$= \sqrt{2}(2cos\theta(\bar{r}\cdot\bar{a}) + rcos\theta\bar{a}\cdot\hat{e}_\varphi)$$