Fusionsplasmafysik
Elektroteknik och datavetenskap
KTH, Teknikringen 29
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 14.00 - 18.00 tisdagen den 20 oktober 2020

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Tentamen består av åtta uppgifter:
- sex grundläggande uppgifter, ett problem för varje lärandemål (ILO)
- två mer avancerade uppgifter.

Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p.
För att nå betyget E på tentamen måste studenten uppfylla alla sex lärandemål (ILO). Ett lärandemål uppfylls om studenten får minst 1,5 poäng på motsvarande uppgift på tentamen (eller blivit godkänd på motsvarande moment i den löpande examinationen).

BETYG	POÄNG
E	1.5 poäng för varje lärandemål (från motsvarande uppgifter i tentamen eller från löpande examination), svarande mot 9 poäng
D	som "E" men minst 12 poäng (=3 poäng mer än E) från valfria uppgifter i tentamen
C	som "E" men minst 15 (=6 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen
B	som "E" men minst 18 (=9 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från ett av de avancerade problemen
A	som "E" men minst 21 (=12 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från varje avancerat problem

Miniräknare är *ej tillåten*.
Tillåtet:
- "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- "BETA Mathematics Handbooks for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- vektoralgebra + kroklinjiga koord-system formler.
- mobiltelefon: endast som kamera eller för att skanna lösningen
- PC: bara för att läsa texten av tentamen från CANVAS eller ladda upp dina skannade lösningar till CANVAS
- du kan läsa de detaljerade instruktionerna på denna länken i CANVAS.

Lärare:
- Lorenzo Frassinetti
- Erik Saad
- Björn Ljungberg
- Hampus Nyström
- Kristoffer Lindvall

GRUNDLÄGGANDE UPPGIFTER

----

(1) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

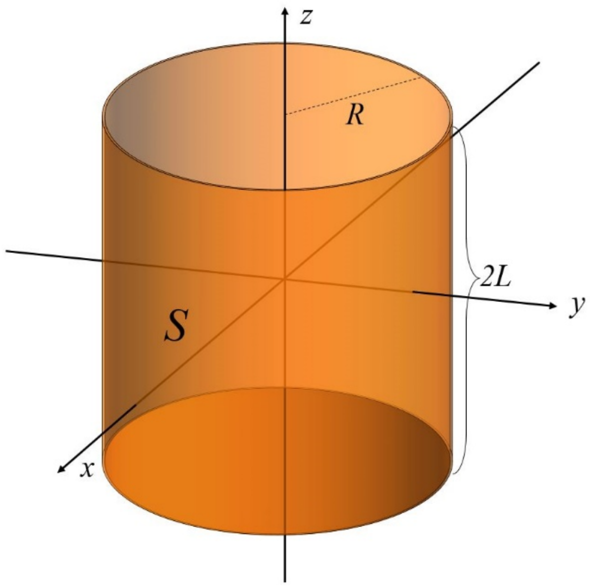
$\bar{E}(\bar{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\bar{r}$. Fältets källa är en yta, S, med konstant laddningstäthet σ_0. Under dessa förutsättningar beräknas $\bar{E}(\bar{r})$ som:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\bar{r}-\bar{r}')\sigma_0 dS'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

där

- dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)
- $\bar{r}'$ är en vektor från origo till dS',
- $\bar{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\bar{E}$).

Betrakta den **<u>öppna ytan</u>** S som definieras som sidan av en cylinder med radie R, axeln riktad längs z-axeln, centrum i origo och mellan planet $z = -L$ och planet $z = +L$.
Se figur.



Beräkna elektriska fältet $\bar{E}$ <u>längs z-axeln</u> genom att utföra följande steg:

(a) Uttryck dessa storheter i ett cylindriskt koordinatsystem anpassat till det givna problemets geometri:

dS'

$\bar{r}'$

$\bar{r}$

$|\bar{r} - \bar{r}'|^3$ **(1.0p)**

(b) Beräkna:

$$\int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{e}_\rho}{(R^2+z'^2)^{3/2}} d\varphi' dz'$$ **(0.5p)**

(c) Beräkna elektriska fältet $\bar{E}$ längs z-axeln. **(1.5p)**

Tips:

$$\int \frac{xdx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + c$$

---

(2) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

Betrakta följande vektorfält:

$$\bar{A} = \frac{\ln y \, e^{x/z}}{z}\hat{e}_x + \frac{e^{x/z}}{y}\hat{e}_y - \frac{x \ln y \, e^{x/z}}{z^2}\hat{e}_z$$

(a) Verifiera att $\bar{A}$ är rotationsfritt. **(0.5p)**

(b) Beräkna linjeintegralen $\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$ där L definieras av: **(2.5p)**

$$L: \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 2 \\ z = 1 \\ y \geq 0 \\ från\ punkten\ A: (3,1,1)\ till\ punkten\ B: (0,3,1) \end{cases}$$

---

(3) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

(a) Bevisa Stokes sats för en sluten kurva L som ligger på xy-planet. Använd inte Greens formel i planet. **(1.5p)**

(b) Betrakta följande vektorfält:

$$\bar{A} = \frac{3e^{yz}}{x^3}\hat{e}_x + \left(\frac{3}{y^3} + \frac{z^3}{3}\right)\hat{e}_y + (3y + z^2 y)\hat{e}_z$$

(b1) ge ett exempel av en <u>**sluten**</u> kurva för vilken Stokes sats ej kan användas för att beräkna $\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$. **(0.25p)**

(b2) ge ett exempel av en <u>**sluten**</u> kurva för vilken Stokes sats kan användas för att beräkna $\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$.

Tips: välj en kurva för vilken integralen i **(b3)** är enkel. **(0.25p)**

(b3) Beräkna $\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$ genom kurvan du har definierat i **(b2)**.

För full poäng, måste du beräkna integralen.

(1.0p)

----

(4) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

Hyperboliska koordinater u, v, z definieras av:

$$\begin{cases} u = \ln \sqrt{\dfrac{x}{y}} \\ v = \sqrt{xy} \\ z = z \end{cases}$$

(a) Beräkna basvektorerna $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_z$ i ett hyperboliskt koordinatsystem. **(1p)**

(b) Uttryck gradienterna av ett skalarfält ϕ i ett hyperboliskt koordinatsystem. **(0.75p)**

(c) Beräkna gradienten av skalarfältet

$\phi = e^{uv}$

i ett hyperboliskt koordinatsystem. **(0.75p)**

(d) Beräkna vinkeln mellan vektorn $\hat{e}_u - 2\hat{e}_v + 2\hat{e}_z$ och vektorn $\nabla\phi$ i punkten $u = 1, v = 2,\ z = 1$. **(0.50p)**

----

(5) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

Vektorlaplacianen är i kartesiska koordinater definierad som: $\nabla^2 \bar{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z)$

(a) Visa med nablaräkning eller indexräkning att

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{A}) \qquad \textbf{(1.5p)}$$

(b) Betrakta vektorfältet

$$\bar{A} = \bar{A}_0 \sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$$

där $\bar{A}_0$ och $\bar{k}$ är två konstanta vektorer och $\bar{r}$ är ortsvektorn.

(b1) Visa att $\nabla \cdot \bar{A} = \bar{A}_0 \cdot \bar{k} \cos(\bar{k} \cdot \bar{r})$ **(0.5p)**

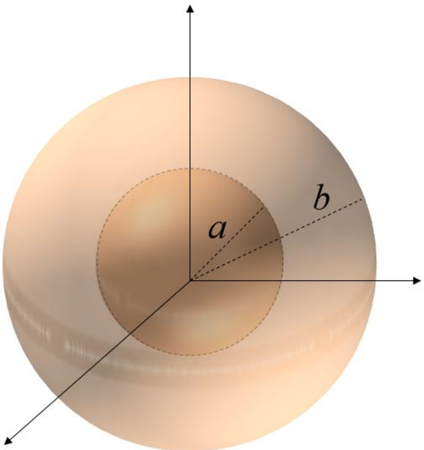
(b2) Visa att $\nabla \times \bar{A} = -\bar{A}_0 \times \bar{k} \cos(\bar{k} \cdot \bar{r})$ **(0.5p)**

(b3) Med hjälp av uttrycket i 5(a) visa att $\nabla^2 \bar{A} = -|\bar{k}|^2 \bar{A}_0 \sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$ **(0.5p)**

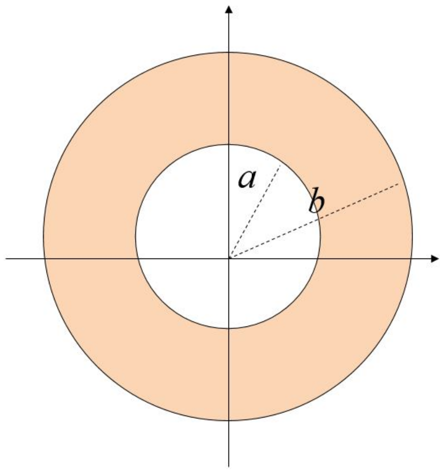
---

(6) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

Betrakta ett tjockt sfäriskt skal med centrum i origo och med inre radie a och yttre radie b. Se figur. Skalet har en konstant volymladdningstäthet $\rho_c = k$. Det finns ingen laddning i $r < a$ och $r > b$.



3D-vy



tvärsnitt i xy planet

Från teoretisk elektroteknik vet vi att:

(1) det elektrostatiska fältet i origo är noll

(2) det elektrostatiska fältet är kontinuerligt på den inre ytan av skalet (i $r = a$) och på den yttre ytan av skalet (i $r = b$)

(3) den elektrostatiska potentialen är kontinuerlig på den inre ytan av skalet (i $r = a$) och på den yttre ytan av skalet (i $r = b$)

(4) den elektrostatiska potentialen går mot 0 då $r \to \infty$.

Betrakta Poissons ekvation:

$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$ (där ε_0 är en konstant)

(a) Skriv ner Poissons ekvation i ett lämpligt koordinatsystem. **(0.2p)**

(b) Utnyttja problemets symmetri för att förenkla ekvationen. **(0.2p)**

(c) Skriv ner de matematiska uttrycken för alla randvillkor. **(0.6p)**

(d) Använd ekvationen från (b) och randvillkorna från (c) för att beräkna den elektrostatiska potentialen V **och** det elektrostatiska fältet $\bar{E} = -\nabla V$ i områdena:

- $r < a$
- $a < r < b$
- $r > b$ **(1.5p)**

(e) Extra poäng om lösning **(d)** är perfekt och om du ritar ut potentialen och det elektriska fältet. **(0.5p)**

AVANCERADE UPPGIFTER

(7) UPPGIFT 7

Betrakta vektorfältet

$$\bar{A} = \left(\frac{1+r^3}{r^2}\right)\hat{e}_r + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_\theta + r\sin 2\theta\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

Beräkna flödet

$$\iint_S \bar{A}\cdot d\bar{S}$$

där S är en öppen yta som definieras av:

$$S:\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1\\ y<0\\ \hat{n}\cdot\hat{e}_y>0\end{cases}$$

(3p)

(8) UPPGIFT 8

Visa att:

$$\int_L \left[\nabla\cdot\left((\bar{r}\times\bar{a})\times\bar{r}\right)\right]\left((\bar{r}\cdot\nabla)\bar{r}\right)\times d\bar{r} = -4R^3(\bar{a}\cdot\hat{e}_x)\hat{e}_z$$

där $\bar{a}$ är en konstant vektor, $\bar{r}$ ortsvektorn och där kurvan L definieras av

$$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ z=0\\ x\geq 0\\ i\ \ punkten\, x=0, y=R, z=0\ har\ L\ tangentvektor\ \hat{e}_x\end{cases}$$

(3p)

SOLUTIONS

(1) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

(a)

$$
\begin{aligned}
&dS' = R dz' d\varphi' \\
&\bar{r}' = R\hat{e}_\rho + z'\hat{e}_z \\
&\bar{r} = z\hat{e}_z \\
&\bar{r} - \bar{r}' = -R\hat{e}_\rho + (z - z')\hat{e}_z \\
&|\bar{r} - \bar{r}'| = r' \\
&|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = (R^2 + (z - z')^2)^{3/2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{e}_\rho}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} d\varphi' dz' = \int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{cos\varphi'\hat{e}_x + sin\varphi'\hat{e}_y}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} d\varphi' dz'
$$

$$
= \int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{cos\varphi'\hat{e}_x}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} d\varphi' dz' + \int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi'\hat{e}_y}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} d\varphi' dz' = \bar{0}
$$

because:

$\int_0^{2\pi} cos\varphi'\hat{e}_x \, d\varphi' = \hat{e}_x \int_0^{2\pi} cos\varphi' \, d\varphi' = 0$

$\int_0^{2\pi} sin\varphi'\hat{e}_x \, d\varphi' = \hat{e}_x \int_0^{2\pi} sin\varphi' \, d\varphi' = 0$

(c)

$$
\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{(\bar{r} - \bar{r}')\sigma_0 dS'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{R\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{-R\hat{e}_\rho + (z - z')\hat{e}_z}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' d\varphi' =
$$

$$
= \underbrace{\frac{R\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{-R\hat{e}_\rho}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' d\varphi'}_{\substack{=0 \\ due\ to\ part\ (b)}} + \frac{R\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{(z - z')\hat{e}_z}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' d\varphi' =
$$

$$
= \frac{R\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z \int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi} \frac{(z - z')}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' d\varphi' = \left\{ \begin{array}{c} x = z - z' \\ dx = -dz' \\ z' = L \Rightarrow x = z - L \\ z' = -L \Rightarrow x = z + L \end{array} \right\} =
$$

$$
= -\frac{R\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z \int_{z+L}^{z-L}\int_0^{2\pi} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx d\varphi' = -\frac{R\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z \int_{z+L}^{z-L} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx =
$$

$$
= \frac{R\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + L)^2}} \right]
$$

---

(2) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

The vector field is too complicated to calculate the integral using a parameterization of the curve.
The curve is open, so we cannot apply the Stokes theorem (not directly at least.
However, the vector field has a potential, so we can calculate the line integral by using the potential (see theorem 6.4 in the book).

(a) $\nabla \times \bar{A} = 0$. So, the field is irrotational.

(b)

$$\bar{A} = \frac{\ln y\, e^{x/z}}{z}\hat{e}_x + \frac{e^{x/z}}{y}\hat{e}_y - \frac{x \ln y\, e^{x/z}}{z^2}\hat{e}_z$$

If the potential is ϕ, then

$$\bar{A} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{e}_z$$

We have

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\ln y\, e^{x/z}}{z} \Longrightarrow \phi = \ln y\, e^{x/z} + F(y,z)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{y} + \frac{\partial F}{\partial y}$$

But also $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{e^{x/z}}{y} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Longrightarrow F = G(z) \Longrightarrow \phi = \ln y\, e^{x/z} + G(z)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{x \ln y\, e^{x/z}}{z^2} + \frac{\partial G}{\partial z}$$

But $\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{x \ln y e^{\frac{x}{z}}}{z^2} \Longrightarrow \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \Longrightarrow G(z) = c \Longrightarrow \phi = \ln y\, e^{\frac{x}{z}} + c$

*w*here c is a constant.

So, we have:

$$\int_A^B \bar{A} \cdot d\bar{r} = \phi(r_B) - \phi(r_A) = \left[\ln y\, e^{\frac{x}{z}}\right]_{(0,3,1)} - \left[\ln y\, e^{\frac{x}{z}}\right]_{(3,1,1)} = \ln(3)$$

---

(3) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

(a) See theorem 9.1 in the book

(b)

$$\bar{A} = \frac{3e^{yz}}{x^3}\hat{e}_x + \left(\frac{3}{y^3} + \frac{z^3}{3}\right)\hat{e}_y + (3y + z^2 y)\hat{e}_z$$

The field is not continuous on the planes $x = 0$ and $y = 0$.

(b1). The theorem cannot be used for any closed curve that crosses the plane $x = 0$ or the plane $y = 0$.

Example:

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(b2). The theorem can be used for any closed curve that does not cross the plane $x = 0$ and the plane $y = 0$.

Example:

$$L: \begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Which is a circle on the plane x=2, with normal $\hat{n} = \pm\hat{e}_x$, center in (2,2,0) and radius 1. For simplicity, we can choose $\hat{n} = +\hat{e}_x$.

(b3).

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S}$$

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3e^{yz}}{x^3} & \left(\frac{3}{y^3} + \frac{z^3}{3}\right) & (3y + z^2 y) \end{vmatrix} = 3\hat{e}_x + \frac{3ye^{yz}}{x^3}\hat{e}_y - \frac{3ze^{yz}}{x^3}\hat{e}_z$$

From (b2): $d\bar{S} = \hat{e}_x dS$

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = \iint_S \left(3\hat{e}_x + \frac{3ye^{yz}}{x^3}\hat{e}_y - \frac{3ze^{yz}}{x^3}\hat{e}_z\right) \cdot \hat{e}_x dS = \iint_S 3dS = 3\pi$$

---

(4) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

$$\begin{cases} u = \ln\sqrt{\dfrac{x}{y}} \\ v = \sqrt{xy} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ve^{u} \\ y = ve^{-u} \\ z = z \end{cases}$$

(a)

$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\right)$ with $h_i = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\right|$

$\bar{r} = ve^{u}\hat{e}_x + ve^{-u}\hat{e}_y + z\hat{e}_z$

Scale factors:

$$h_u = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial u}(ve^{u}\hat{e}_x + ve^{-u}\hat{e}_y + z\hat{e}_z)\right| = |(ve^{u}\hat{e}_x - ve^{-u}\hat{e}_y)| = v\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}$$
$$h_v = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial v}(ve^{u}\hat{e}_x + ve^{-u}\hat{e}_y + z\hat{e}_z)\right| = |(e^{u}\hat{e}_x + e^{-u}\hat{e}_y)| = \sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}$$
$$h_z = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial z}(ve^{u}\hat{e}_x + ve^{-u}\hat{e}_y + z\hat{e}_z)\right| = |\hat{e}_z| = 1$$

$$\hat{e}_u = \frac{e^{u}\hat{e}_x - e^{-u}\hat{e}_y}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}$$
$$\hat{e}_v = \frac{e^{u}\hat{e}_x + e^{-u}\hat{e}_y}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}$$
$$\hat{e}_z = \hat{e}_z$$

(b)

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)\hat{e}_v + \frac{1}{h_z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\hat{e}_z$$
$$\nabla\phi = \frac{1}{v\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)\hat{e}_u + \frac{1}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)\hat{e}_v + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\hat{e}_z$$

(c)

$$\phi = e^{uv}$$
$$\nabla\phi = \frac{1}{v\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}\left(\frac{\partial e^{uv}}{\partial u}\right)\hat{e}_u + \frac{1}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}\left(\frac{\partial e^{uv}}{\partial v}\right)\hat{e}_v + \left(\frac{\partial e^{uv}}{\partial z}\right)\hat{e}_z$$
$$= \frac{e^{uv}}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}\hat{e}_u + \frac{ue^{uv}}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}\hat{e}_v = \frac{e^{uv}}{\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}}(\hat{e}_u + u\hat{e}_v)$$

(d)

$$[\nabla\phi]_{u=1,v=2,z=1} = \frac{e^{2}}{\sqrt{e^{2} + e^{-2}}}(\hat{e}_u + \hat{e}_v)$$

$$\bar{a} = \hat{e}_u - 2\hat{e}_v + 2\hat{e}_z$$

$$\nabla\phi \cdot \bar{a} = |\nabla\phi||\bar{a}|\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\nabla\phi \cdot \bar{a}}{|\nabla\phi||\bar{a}|} = \frac{(\hat{e}_u + \hat{e}_v)\cdot(\hat{e}_u - 2\hat{e}_v + 2\hat{e}_z)}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\alpha = acos\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

----

(5) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

(a) For nablaräkning, see page 221 in the book.

For indexräkning:

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla\times(\nabla\times\bar{A})$$

We can rewrite it as:

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$$

and we start working with the i-component of the left term:

$$\begin{aligned}(\nabla\times(\nabla\times\bar{A}))_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l A_m) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l A_m - \delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l A_m = \partial_j\partial_i A_j - \partial_j\partial_j A_i = \partial_i \underbrace{\partial_j A_j}_{\nabla\cdot\bar{A}} - \underbrace{\partial_j\partial_j}_{\nabla^2} A_i \\ &= \partial_i(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2 A_i = (\nabla(\nabla\cdot\bar{A}))_i - (\nabla^2\bar{A})_i\end{aligned}$$

So we have $\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$

(b) $\bar{A} = \bar{A}_0\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})$

Note that $\bar{k}\cdot\bar{r} = (k_x x + k_y y + k_z z)$

$$\nabla^2\bar{A} = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla\times(\nabla\times\bar{A})$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \nabla\cdot(\bar{A}_0\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})) = (\nabla\cdot\bar{A}_0)\sin(\bar{k}\cdot\bar{r}) + \bar{A}_0\cdot\nabla(\sin(\bar{k}\cdot\bar{r}))$$

$\nabla\cdot\bar{A}_0 = 0$ because $\bar{A}_0$ is a constant vector.

$$\nabla(\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})) = \left(\frac{\partial\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial x}, \frac{\partial\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial y}, \frac{\partial\sin(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial z}\right) = \cos(\bar{k}\cdot\bar{r})\left(\frac{\partial(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial x}, \frac{\partial(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial y}, \frac{\partial(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial z}\right) = \cos(\bar{k}\cdot\bar{r})\left(\frac{\partial(k_x x + k_y y + k_z z)}{\partial x}, \frac{\partial(k_x x + k_y y + k_z z)}{\partial y}, \frac{\partial(k_x x + k_y y + k_z z)}{\partial z}\right) = \cos(\bar{k}\cdot\bar{r})(k_x, k_y, k_z) = \bar{k}\cos(\bar{k}\cdot\bar{r})$$

So, we have: $\nabla\cdot\bar{A} = \bar{A}_0\cdot\bar{k}\cos(\bar{k}\cdot\bar{r})$

$$\nabla(\nabla\cdot\bar{A}) = \nabla(\bar{A}_0\cdot\bar{k}\cos(\bar{k}\cdot\bar{r})) = \nabla(\bar{A}_0\cdot\bar{k})\cos(\bar{k}\cdot\bar{r}) + (\bar{A}_0\cdot\bar{k})\nabla(\cos(\bar{k}\cdot\bar{r}))$$

$\nabla(\bar{A}_0 \cdot \bar{k}) = 0$ because $\bar{A}_0$ and $\bar{k}$ are constant vectors

$\nabla(\cos(\bar{k} \cdot \bar{r}))=$

$\left(\frac{\partial \cos(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial x}, \frac{\partial \cos(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial y}, \frac{\partial \cos(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial z}\right) = -\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})\left(\frac{\partial(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial x}, \frac{\partial(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial y}, \frac{\partial(\bar{k}\cdot\bar{r})}{\partial z}\right) = -\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})\left(\frac{\partial(k_x x+k_y y+k_z z)}{\partial x}, \frac{\partial(k_x x+k_y y+k_z z)}{\partial y}, \frac{\partial(k_x x+k_y y+k_z z)}{\partial z}\right) = -\bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$

So, we have: $\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) = -(\bar{A}_0 \cdot \bar{k})\bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$

$\nabla \times \bar{A} = \nabla \times (\bar{A}_0 \sin(\bar{k} \cdot \bar{r})) = (\nabla \times \bar{A}_0)\sin(\bar{k} \cdot \bar{r}) - \bar{A}_0 \times \nabla(\sin(\bar{k} \cdot \bar{r}))$

$\nabla \times \bar{A}_0 = 0$ because $\bar{A}_0$ is a constant vector.
$\nabla(\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})) = \bar{k}\cos(\bar{k} \cdot \bar{r})$ see above

So, we have:
$\nabla \times \bar{A} = -\bar{A}_0 \times \bar{k}\cos(\bar{k} \cdot \bar{r})$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = -\nabla \times (\bar{A}_0 \times \bar{k}\cos(\bar{k} \cdot \bar{r}))$$
$$= -\left(\nabla \times (\bar{A}_0 \times \bar{k})\right)\cos(\bar{k} \cdot \bar{r}) + (\bar{A}_0 \times \bar{k}) \times \nabla(\cos(\bar{k} \cdot \bar{r}))$$

$\nabla \times (\bar{A}_0 \times \bar{k}) = 0$ because $\bar{A}_0$ and $\bar{k}$ are constant vectors.
$\nabla(\cos(\bar{k} \cdot \bar{r})) = -\bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$ see above

$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = -(\bar{A}_0 \times \bar{k}) \times \bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$
With the bac-cab rule, we get: $(\bar{A}_0 \times \bar{k}) \times \bar{k} = (\bar{A}_0 \cdot \bar{k})\bar{k} - |\bar{k}|^2\bar{A}_0$
So, we have:
$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = -(\bar{A}_0 \cdot \bar{k})\bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r}) + |\bar{k}|^2\bar{A}_0\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$

Adding all the terms together, we obtain:

$$\nabla^2\bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{A})$$
$$= -(\bar{A}_0 \cdot \bar{k})\bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r}) + (\bar{A}_0 \cdot \bar{k})\bar{k}\sin(\bar{k} \cdot \bar{r}) - |\bar{k}|^2\bar{A}_0\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$$
$$= -|\bar{k}|^2\bar{A}_0\sin(\bar{k} \cdot \bar{r})$$

----

(6) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

(a)

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

(b) due to the symmetry of the problem the derivatives in theta and phi are zero. So, the equation can be simplified to

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

(c) there are three regions: $r < a,\ \ a < r < b,\ \ r > b$. We can label the solutions to the Poisson's equation as
V_1, for $r < a$
V_2, for $a < r < b$
V_3, for $r > b$
and the corresponding electric field $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$.

The boundary conditions are:

(1) det elektrostatiska fältet i origo är noll
$\bar{E}_1(0) = 0$

(2) det elektrostatiska fältet är kontinuerlig på den inre ytan av skalen (i $r = a$) och på den yttre ytan av skalen (i $r = b$)
$\bar{E}_1(a) = \bar{E}_2(a)$
$\bar{E}_2(b) = \bar{E}_3(b)$

(3) den elektrostatiska potentialen är kontinuerlig på den inre ytan av skalen (i $r = a$) och på den yttre ytan av skalen (i $r = b$)
$V_1(a) = V_2(a)$
$V_2(b) = V_3(b)$

(4) den elektrostatiska potentialen är noll i limit $r \to \infty$.
$\lim_{r\to\infty} V_3(r) = 0$

(d) First of the, the electric field can be calculated from the gradient:

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r$$

The theta and phi component are zero due to symmetry.

Inside the inner radius, r<a
there is no charge, so we have to solve the Laplace equation whose general solution is:

$$V_1 = -\frac{c}{r} + d$$

Then, the corresponding electric field is
$$\bar{E}_1 = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r = -\frac{c}{r^2}\hat{e}_r$$

Due to the boundary condition (1), $\bar{E}_1(0) = 0$ we obtain c=0. So:

$$V_1 = d$$
$$\bar{E}_1 = \bar{0}$$

Outside the outer radius, r>b
there is no charge, so we have to solve the Laplace equation whose general solution is:

$$V_3 = -\frac{e}{r} + f$$

Then, the corresponding electric field is
$$\bar{E}_3 = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r = -\frac{e}{r^2}\hat{e}_r$$

Due to the boundary condition (4), $\lim_{r\to\infty} V_3(r) = 0$ we obtain f=0. So:

$$V_3 = -\frac{e}{r}$$
$$\bar{E}_3 = -\frac{e}{r^2}\hat{e}_r$$

Inside the shell, a<r<b
The charge density is constant. We have to solve the equation:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_2}{\partial r}\right) = -\frac{k}{\varepsilon_0}$$

By integrating, we obtain:

$$V_2 = -\frac{k}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{g}{r} + h$$
$$\bar{E}_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial r}\hat{e}_r = \left(\frac{k}{3\varepsilon_0}r - \frac{g}{r^2}\right)\hat{e}_r$$

Apply boundary conditions at r=a and r=b
From the conditions (2) and (3), we obtain:

$$V_1(a) = V_2(a) \;\Rightarrow\; d = -\frac{k}{6\varepsilon_0}a^2 - \frac{g}{a} + h$$

$$V_2(b) = V_3(b) \;\Rightarrow\; -\frac{k}{6\varepsilon_0}b^2 - \frac{g}{b} + h = -\frac{e}{b}$$
$$\bar{E}_1(a) = \bar{E}_2(a) \;\Rightarrow\; 0 = \left(\frac{k}{3\varepsilon_0}a - \frac{g}{a^2}\right)$$
$$\bar{E}_2(b) = \bar{E}_3(b) \;\Rightarrow\; \left(\frac{k}{3\varepsilon_0}b - \frac{g}{b^2}\right) = -\frac{e}{b^2}$$

So we have a system of four equations in the four variables d, e, g, h

If we solve the system, we obtain:

$$d = \frac{k}{2\varepsilon_0}(b^2 - a^2)$$
$$e = \frac{k}{3\varepsilon_0}(a^3 - b^3)$$
$$g = \frac{k}{3\varepsilon_0}a^3$$
$$h = \frac{k}{2\varepsilon_0}b^2$$

Inserting these expressions into the general solutions, we obtain:

$$V_1 = \frac{k}{2\varepsilon_0}(b^2 - a^2)$$
$$\bar{E}_1 = \bar{0}$$

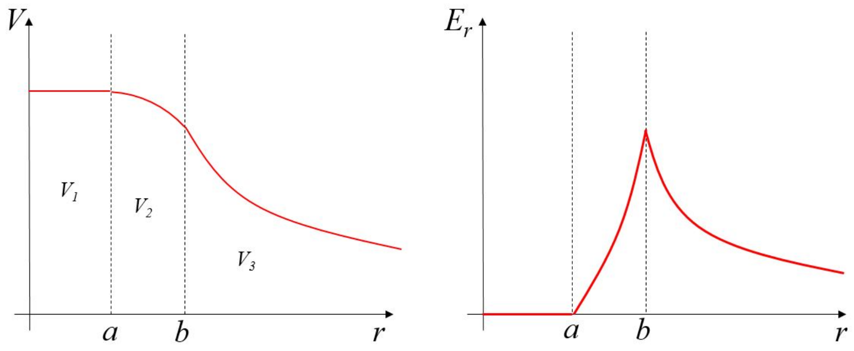
$$V_2 = -\frac{k}{6\varepsilon_0}r^2\left[1 - 3\left(\frac{b}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]$$

$$\bar{E}_2 = \frac{k}{3\varepsilon_0}r\left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\right)\hat{e}_r$$

$$V_3 = \frac{k}{3\varepsilon_0}\frac{(b^3 - a^3)}{r}$$

$$\bar{E}_3 = \frac{k}{3\varepsilon_0}\frac{(b^3 - a^3)}{r^2}\hat{e}_r$$

(e)

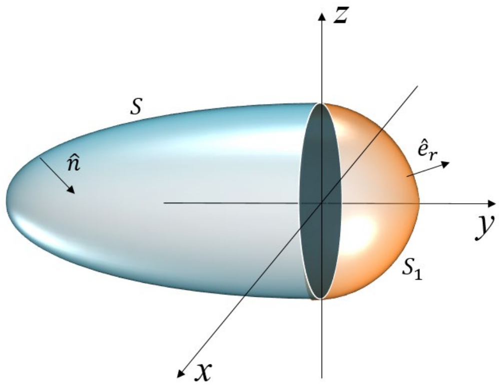


---

(7) UPPGIFT 7

The surface is half an ellipsoid and the field is rather complicated. So if we use the parameterization of the surface, we will end up with a very complicated integral. Moroever, we cannot use the Gauss' theorem directly, because the surface is open.

However, we can choose a new surface S_1, to close S, then apply the Gauss theorem (and theorem 16.1) and subtract the flux over S_1.



A possibility is to choose S_1 as half a sphere centered in the origin, with radius 2 and with y>0. The surface S_0=-S+S_1, is closed, see the figure. In this case, the field is not continuous in the origin, so we have to be careful (see later). Another, perhaps wiser, choice is to use the half sphere at y<0. In this case, the origin is not inside S_0, so the solution would be simpler.
A choice not very wise would be to use the circle on the xz-plane, with radius 2 and centered in the origin. In this case, the field is not continuous on the surface, so you cannot apply at all the Gauss theorem.
Note that I have used –S, because I want that the normal to S_0 points outwards, in order to apply correctly the Gauss theorem and theorem 16.1. So, we have that S_0 is closed and that S=S_1-S_0. So, the flux over S is:

$$\iint_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iint_{S_1-S_0} \bar{A}\cdot d\bar{S} = -\oiint_{S_0} \bar{A}\cdot d\bar{S} + \iint_{S_1} \bar{A}\cdot d\bar{S}$$

It is important to choose S_1 in a way that the flux $\iint_{S_1} \bar{A} \cdot d\bar{S}$ is an easy integral. For example, if S_1 is half a circle centered in the origin, its normal is in the radial direction, so when we calculate the scalar product $\bar{A} \cdot d\bar{S}$ the theta and phi components disappear. Now we start to calculate the two integrals:

$$\oiint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \oiint_{S_0} \left(\left(\frac{1+r^3}{r^2} \right) \hat{e}_r + r \sin\theta \sin\varphi \, \hat{e}_\theta + r \sin 2\theta \cos\varphi \, \hat{e}_\varphi \right) \cdot d\bar{S}$$

$$= \underbrace{\oiint_{S_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\bar{S}}_{\substack{=4\pi \\ \text{due to stats } 16.1}} + \underbrace{\oiint_{S_0} \left(r\hat{e}_r + r \sin\theta \sin\varphi \, \hat{e}_\theta + r \sin 2\theta \cos\varphi \, \hat{e}_\varphi \right) \cdot d\bar{S}}_{\text{we can apply Gauss theorem}}$$

$$= 4\pi + \iiint_{V_0} \underbrace{\nabla \cdot \left(r\hat{e}_r + r \sin\theta \sin\varphi \, \hat{e}_\theta + r \sin 2\theta \cos\varphi \, \hat{e}_\varphi \right)}_{=3} dV$$

$$= 4\pi + \iiint_{V_0} 3dV = 4\pi + 3V_0 = 4\pi + 3V + 3V_1$$

V is the volume of half the ellipsoid with radii 2, 4, 2: $V = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3} 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{32\pi}{3}$

V is the volume of half the sphere with radius 2: $V_1 = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3} 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{16\pi}{3}$

$$\oiint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} = 4\pi + 32\pi + 16\pi = 52\pi$$

For the second integral, we have:

$$\iint_{S_1} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \left(\left(\frac{1+r^3}{r^2} \right) \hat{e}_r + r \sin\theta \sin\varphi \, \hat{e}_\theta + r \sin 2\theta \cos\varphi \, \hat{e}_\varphi \right) \cdot \underbrace{d\bar{S}}_{=R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r}$$

$$= \iint_{S_1} \left(\frac{1+R^3}{R^2} \right) R^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = (1+R^3) \iint_{S_1} \sin\theta \, d\theta d\varphi = 2\pi(1+R^3) = 18\pi$$

So, the final integral is:

$$\iint_{S} \bar{A} \cdot d\bar{S} = -\oiint_{S_0} \bar{A} \cdot d\bar{S} + \iint_{S_1} \bar{A} \cdot d\bar{S} = -52\pi + 18\pi = -34\pi$$

---

(8) UPPGIFT 8

First, let's simplify the integrand:

$$(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{r} = \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x,y,z) = \left(x\frac{\partial(x,y,z)}{\partial x}+y\frac{\partial(x,y,z)}{\partial y}+z\frac{\partial(x,y,z)}{\partial z}\right) = (x,y,z) = \bar{r}$$

$$\nabla\cdot\left((\bar{r}\times\bar{a})\times\bar{r}\right) = +\bar{r}\cdot\nabla\times(\bar{r}\times\bar{a}) - (\bar{r}\times\bar{a})\cdot\underbrace{(\nabla\times\bar{r})}_{=0} = \bar{r}\cdot\nabla\times(\bar{r}\times\bar{a})$$

$$= \bar{r}\cdot\left[\underbrace{(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{r}}_{=\bar{a}} - \underbrace{(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{a}}_{=0} + \bar{r}\underbrace{(\nabla\cdot\bar{a})}_{=0} - \bar{a}\underbrace{(\nabla\cdot\bar{r})}_{=3}\right] = -2\bar{r}\cdot\bar{a}$$

So, we obtain:

$$\int_L [\nabla\cdot((\bar{r}\times\bar{a})\times\bar{r})]\left((\bar{r}\cdot\nabla)\bar{r}\right)\times d\bar{r} = \int_L [-2\bar{r}\cdot\bar{a}]\,\bar{r}\times d\bar{r} =$$

$$= \left\{d\bar{r} = -Rd\varphi\hat{e}_\varphi \quad\Rightarrow\quad \bar{r}\times d\bar{r} = -RRd\varphi\hat{e}_r\times\hat{e}_\varphi = -R^2d\varphi\hat{e}_z\right\} =$$

$$= \int_L [2\bar{r}\cdot\bar{a}]\,R^2 d\varphi\hat{e}_z = 2R^3\hat{e}_z\int_L\left(\hat{e}_\rho\cdot\bar{a}\right)d\varphi = 2R^3\hat{e}_z\underbrace{\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left(a_x cos\varphi + a_y sin\varphi\right)d\varphi}_{-2a_x}$$

$$= -4R^3a_x\hat{e}_z = -4R^3(\bar{a}\cdot\hat{e}_x)\hat{e}_z$$

Fusionsplasmafysik
Elektroteknik och datavetenskap
KTH, Teknikringen 31
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 14.00 - 17.00 onsdagen den 23 oktober 2019

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Tentamen består av åtta uppgifter:

- sex grundläggande uppgifter, ett problem för varje lärandemål (ILO)
- två mer avancerade uppgifter.

Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p.
För att nå betyget E på tentamen måste studenten uppfylla alla sex lärandemål (ILO). Ett lärandemål uppfylls om studenten får minst 1,5 poäng på motsvarande uppgift på tentamen (eller blivit godkänd på motsvarande moment i den löpande examinationen).

BETYG	POÄNG
E	1.5 poäng för varje lärandemål (från motsvarande uppgifter i tentamen eller från löpande examination), svarande mot 9 poäng
D	som "E" men minst 12 poäng (=3 poäng mer än E) från valfria uppgifter i tentamen
C	som "E" men minst 15 (=6 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen
B	som "E" men minst 18 (=9 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från ett av de avancerade problemen
A	som "E" men minst 21 (=12 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från varje avancerat problem

Miniräknare är *ej tillåten.*
Tillåtet:

- "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- "BETA Mathematics Handbooks for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- vektoralgebra + kroklinjiga koord-system formler.

Lärare:

- Lorenzo Frassinetti
- Kristoffer Lindvall
- Erik Saad
- Björn Ljungberg
- Pablo Vallejos Olivares

GRUNDLÄGGANDE UPPGIFTER

---

(9) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

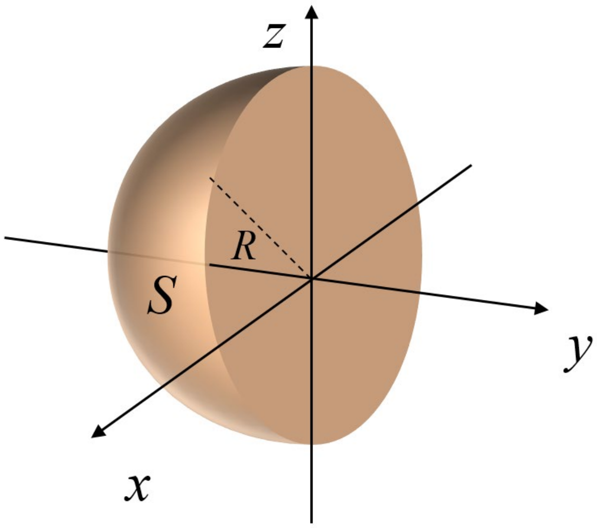
$\overline{E}(\overline{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\overline{r}$. Fältets källa är en yta, S, med konstant laddningstäthet σ_0. Under dessa förutsättningar beräknas $\overline{E}(\overline{r})$ som:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{(\overline{r} - \overline{r}')\sigma_0 dS'}{|\overline{r} - \overline{r}'|^3}$$

där

- dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)
- $\overline{r}'$ är en vektor från origo till dS',
- $\overline{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\overline{E}$).

Betrakta den öppna ytan S som definieras som en halv sfär ($y \leq 0$) med radie R och som har centrum i origo. Se figur.



Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ i origo genom att utföra följande steg:

(d) Uttryck dessa storheter i ett sfäriskt koordinatsystem anpassat till det givna problemets geometri:

dS'

$\overline{r}'$

$\overline{r}$

$|\overline{r} - \overline{r}'|^3$ **(1.0p)**

(e) Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ i origo. **(2.0p)**

---

(10) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

Betrakta följande vektorfält: $\bar{A} = -x\hat{e}_x + x\hat{e}_y + 9xz\hat{e}_z$

(a) Beräkna linjeintegralen $\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$ där L definieras av: **(2.7p)**

$$\begin{cases} 4x^2 + 9z^2 = 1 \\ y = x \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

(b) Är integralen positiv eller negativ? Motivera **(0.3p)**

---

(11) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

(a) Bevisa Gauss sats med matematiska formler **(1.5p)**

(b) Betrakta följande vektorfält:

$$\bar{A} = \frac{1}{x^2 + x - 6}\hat{e}_x + \frac{(2xy + y)}{\left(x^2 + x - 6\right)^2}\hat{e}_y + 3z\hat{e}_z$$

(b1) ge ett exempel av en **sluten** yta för vilken Gauss sats ej kan användas för att beräkna $\oiint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$ **(0.25p)**

(b2) ge ett exempel av en **sluten** yta för vilken Gauss sats kan användas för att beräkna $\oiint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$ **(0.25p)**

(c) Beräkna flödet genom ytan du har definierat i (b2) av vektorfältet $\bar{A}$ med Gauss sats. **(1p)**

---

(12) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

Paraboliska koordinater σ, τ, φ definieras av:

$$\begin{cases} x = \sigma\tau \cos\varphi \\ y = \sigma\tau \sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \end{cases}$$

(a) Beräkna basvektorerna $\hat{e}_\sigma, \hat{e}_\tau, \hat{e}_\varphi$ i ett paraboliskt koordinatsystem **(1p)**

(b) Uttryck gradienterna av ett skalarfält ϕ i ett paraboliskt koordinatsystem **(1p)**

(c) Beräkna gradienten av skalarfältet $\phi = \tau \cos\varphi$ i ett paraboliskt koordinatsystem **(1p)**

---

(13) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

(c) Visa med nablaräkning eller indexräkning att

$$\nabla\cdot\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)=\overline{B}\cdot\left(\nabla\times\overline{A}\right)-\overline{A}\cdot\left(\nabla\times\overline{B}\right)$$ **(1.5p)**

(b) Använd 5(a) för att visa att (där $\overline{a}$ är en konstant vektor och $\overline{r}$ ortsvektorn)

$$\nabla\cdot\left(\left(\overline{r}\times\overline{a}\right)\times\overline{r}\right)=-2\overline{a}\cdot\overline{r}$$ **(1.5 p)**

---

(14) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

En oändligt lång cylinder med radie R har laddningstätheten ρ_c:

$$\rho_c=\rho_0\left(1-\frac{\rho}{R}\right)$$

där ρ_0 är en konstant och ρ är avståndet från cylinderaxeln. Anta att potentialen på cylinderytan är V_0 och att det elektrostatiska fältet på cylinderaxeln är noll.

Betrakta Poissons ekvation:

$$\nabla^2V=-\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$ (där ε_0 är en konstant)

(a) Skriv ner Poissons ekvation genom att använda ett lämpligt koordinatsystem. **(0.3p)**

(b) Utnyttja problemets symmetri för att förenkla ekvationen. **(0.5p)**

(c) Använd ekvationen ovan för att beräkna den elektrostatiska potentialen V **och** det elektrostatiska fältet $\overline{E}=-\nabla V$:

- innanför cylindern, **(1.0p)**
- utanför cylindern. **(1.0p)**

(d) Rita ut potentialen och det elektriska fältet innanför och utanför cylindern. **(0.2p)**

AVANCERADE UPPGIFTER

(15) UPPGIFT 7

Betrakta vektorfältet

$$\bar{A} = \nabla \times \left[\frac{\ln\left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right)}{2} \hat{e}_z \right]$$

Beräkna linjeintegralen

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$$

där L är en ellips som ligger i xy-planet, med centrum i origo, storradie 3 längs y-axeln och lillradie 2 längs x-axeln. I punkten $x=0$, $y=3$, $z=0$ har L tangentvektor $\hat{e}_x$.

(3p)

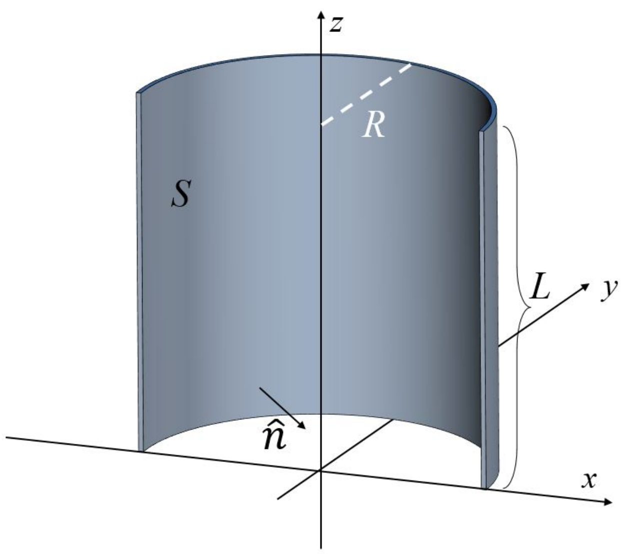
(16) UPPGIFT 8

Visa att:

$$\iint_S \nabla \times \left((\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{b} \right) \times d\bar{S} = 2RL\hat{e}_y \times (\bar{a} \times \bar{b})$$

där $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är två konstanta vektorer, $\bar{r}$ ortsvektorn och där S är en halv cylinder med radie R och höjd L. Halvcylindern har axeln riktad längs z-axeln och står på xy-planet. Halvcylindern definieras som $y \geq 0$. Normalen är riktad som i figuren.

(3p)



SOLUTIONS

----

(7) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

First we can rotate the coordinate system to have the base of the surface on the xy leave at z>0 (at the end we need to remember to go back to the original coordinate system)

(a)

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\bar{r}-\bar{r}')\sigma_0 dS'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

$dS' = r'^2 \sin\theta d\theta d\varphi$
$\bar{r}' = r'\hat{e}_r$
$\bar{r} = \bar{0}$
$\bar{r}-\bar{r}' = -r'\hat{e}_r$
$|\bar{r}-\bar{r}'| = r'$
$|\bar{r}-\bar{r}'|^3 = r'^3$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{(\bar{r}-\bar{r}')\sigma_0 dS'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\hat{e}_r r'^3 \sin\theta d\theta d\varphi}{r'^3} = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \hat{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \hat{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z\right)d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(\sin^2\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin^2\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y + \sin\theta\cos\theta\,\hat{e}_z\right)d\theta d\varphi =$$

$$= \underbrace{\hat{e}_x\int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin^2\theta\cos\varphi d\theta d\varphi}_{=0} + \underbrace{\hat{e}_y\int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi}_{=0} + \hat{e}_z\int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi\hat{e}_z\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin\theta\cos\theta d\theta = \pi\hat{e}_z[\sin^2\theta]_{\theta_0}^{\theta_1} = \pi\hat{e}_z(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_0)$$

(b)

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\pi\hat{e}_z\left(\sin^2\frac{\pi}{2} - \sin^2 0\right) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\pi\hat{e}_z$$

Finally, we need to go back to the original coordinate system. The final result is:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}\hat{e}_y$$

---

(8) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

$$\int_L \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \bar{A}(\bar{r}(\varphi))\cdot\frac{d\bar{r}}{d\varphi}d\varphi$$

First, we need to find a parameterization:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}cos\varphi \\ z = \frac{1}{3}sin\varphi \\ y = \frac{1}{2}cos\varphi \\ \varphi: 0 \to +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\bar{r}(\varphi) = \left(\frac{1}{2}cos\varphi, \frac{1}{2}cos\varphi, \frac{1}{3}sin\varphi\right)$ med $: 0 \to +\frac{\pi}{2}$

Note that the orientation of the curve is not specified, so the angle phi can also be from pi/2 to 0.

$$\frac{d\bar{r}}{d\varphi} = \left(-\frac{1}{2}sin\varphi, -\frac{1}{2}sin\varphi, \frac{1}{3}cos\varphi\right)$$

$$\bar{A} = -x\hat{e}_x + x\hat{e}_y + 9xz\hat{e}_z$$

$$\bar{A}(\bar{r}(\varphi)) = \left(-\frac{1}{2}cos\varphi, \frac{1}{2}cos\varphi, 9\frac{1}{6}cos\varphi sin\varphi\right)$$

$$\int_L \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}cos\varphi, \frac{1}{2}cos\varphi, \frac{3}{2}cos\varphi sin\varphi\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}sin\varphi, -\frac{1}{2}sin\varphi, \frac{1}{3}cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}sin\,\varphi cos\varphi - \frac{1}{4}sin\,\varphi cos\varphi + \frac{1}{2}sin\varphi\, cos^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\varphi\, cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

Since orientation is not defined, the result could also be -1/6

---

(9) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

(c) See theorem 8.1

(b)

$$\bar{A} = \frac{1}{x^2+x-6}\hat{e}_x + \frac{(2xy+y)}{\left(x^2+x-6\right)^2}\hat{e}_y + 3z\hat{e}_z$$

The field is not continuous when $x^2 + x - 6 = 0$
Since $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ the field is not continuous at x=2 and x=-3

(b1)
For example, a sphere S1 with radius 1 and centered at (2,0,0)

(b2)
For example, a sphere S2 with radius 1 and centered at (0,0,0)

(c)

$$\oiint_{S2} \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iiint_{V2} \nabla\cdot\bar{A}\, dV$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+x-6}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy+y}{(x^2+x-6)^2}\right) + 3\frac{\partial z}{\partial z} =$$
$$= -\frac{2x+1}{(x^2+x-6)^2} + \frac{2x+1}{(x^2+x-6)^2} + 3 = 3$$

$$\oiint_{S2} \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iiint_{V2} \nabla\cdot\bar{A}\, dV = \iiint_{V2} 3dV = 3V$$

---

(10) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

$$\begin{cases} x = \sigma\tau\, cos\varphi \\ y = \sigma\tau\, sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \end{cases}$$

(a)
$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u_i}\right)$ with $h_i = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u_i}\right|$

$$\bar{r} = \left(\sigma\tau\, cos\varphi, \sigma\tau\, sin\varphi, \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)\right)$$

Scale factors:

$$h_\sigma = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sigma\tau\ cos\varphi, \sigma\tau\ sin\varphi, \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)\right)\right| = |(\tau\ cos\varphi, \tau\ sin\varphi, -\sigma)| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$
$$h_\tau = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \tau}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\sigma\tau\ cos\varphi, \sigma\tau\ sin\varphi, \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)\right)\right| = |(\sigma\ cos\varphi, \sigma\ sin\varphi, \tau)| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$
$$h_\varphi = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sigma\tau\ cos\varphi, \sigma\tau\ sin\varphi, \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)\right)\right| = |(-\sigma\tau\ sin\varphi, \sigma\tau cos\varphi, 0)| = \sigma\tau$$

$$\hat{e}_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}(\tau\ cos\varphi, \tau\ sin\varphi, -\sigma)$$
$$\hat{e}_\tau = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}(\sigma\ cos\varphi, \sigma\ sin\varphi, \tau)$$
$$\hat{e}_\varphi = (-sin\varphi, cos\varphi, 0)$$

(b)

$$grad\phi = \frac{1}{h_\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\right)\hat{e}_\sigma + \frac{1}{h_\tau}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)\hat{e}_\tau + \frac{1}{h_\varphi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\varphi$$
$$grad\phi = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\right)\hat{e}_\sigma + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)\hat{e}_\tau + \frac{1}{\sigma\tau}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\varphi$$

(c)

$$\phi = \tau\ cos\varphi$$
$$grad\phi = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left(\frac{\partial\tau\ cos\varphi}{\partial\sigma}\right)\hat{e}_\sigma + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left(\frac{\partial\tau\ cos\varphi}{\partial\tau}\right)\hat{e}_\tau + \frac{1}{\sigma\tau}\left(\frac{\partial\tau\ cos\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\varphi =$$
$$= \frac{cos\varphi}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\hat{e}_\tau - \frac{sin\varphi}{\sigma}\hat{e}_\varphi$$

---

(11) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

(a) See example 11.4 or problem 12.7(g) in the book

(b) $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$

So $\nabla \cdot ((\bar{r} \times \bar{a}) \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\nabla \times (\bar{r} \times \bar{a})) - (\bar{r} \times \bar{a}) \cdot (\nabla \times \bar{r})$

$(\nabla \times \bar{r}) = 0$

$\nabla \times (\bar{r} \times \bar{a}) = \underbrace{(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{r}}_{\bar{a}} - \bar{a}\underbrace{(\nabla \cdot \bar{r})}_{=3} - \underbrace{(\bar{r} \cdot \nabla)\bar{a}}_{0} + \bar{r}\underbrace{(\nabla \cdot \bar{a})}_{=0} = -2\bar{a}$

$\nabla \cdot ((\bar{r} \times \bar{a}) \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\nabla \times (\bar{r} \times \bar{a})) - (\bar{r} \times \bar{a}) \cdot (\nabla \times \bar{r}) = -2\bar{r} \cdot \bar{a}$

----

(12) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E} = -\nabla V \, .$$

Due to the symmetry of the problem and to fact that the expression for the charge density, the solution will depend only on ρ. Therefore, the derivatives in *z* and *phi* of the Laplacian are zero.
So, if we express the Laplacian in a cylindrical coordinate system, expression (14.4), we obtain

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}_{=0} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

And for the electric field, using (10.43) for the gradient in cylindrical coordinates, we have

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial\varphi}}_{=0}\hat{e}_\varphi - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{=0}\hat{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho$$

So, we have to solve the equation

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

We start to solve the equation inside the cylinder.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{\rho}{R_0}\right) \Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\rho-\frac{\rho^2}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV(\rho)}{d\rho} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{3R}\right)+\frac{k}{\rho}$$ (where k is an integration constant)

But now can note that we already have the expression for the electric field,

$$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho = \left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{3R}\right)-\frac{k}{\rho}\right)\hat{e}_\rho$$

On the cylinder axis, the field must be zero. Se we have *k=0*.
Now we can continue to solve the Poisson equation. Integrating in ρ we obtain,

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{3R}\right) \Rightarrow V(\rho) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^3}{9R}\right)+a$$

Therefore, inside the cylinder the potential and the field are

$$V_{in} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^3}{9R}\right)+a$$

$$\bar{E}_{in} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{3R}\right)\hat{e}_\rho$$

Outside the cylinder, the charge density is zero, so we are left with the Laplace equation in cylindrical symmetry. We already know from Section 17.2, expression (17.10) that in this case the solution is

$V_{out}(\rho) = c\ln\rho + d$

The electric field is

$\bar{E}_{out} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{e}_\rho = -\frac{c}{\rho}\hat{e}_\rho$

Now we need to find the integration constants *a, c and d*. We have three conditions to use.

(1) Continuity of the electric field at $\rho = R$

$\bar{E}_{in}(R) = \bar{E}_{out}(R)$

(2) The value of the electrostatic potential at $\rho = R$

$V_{out}(R) = V_0$

(3) Continuity of the potential at $\rho = R$

$V_{in}(R) = V_{out}(R)$

These three conditions lead to a system of three equations in the three unknown *a, c and d*,

$$\begin{cases} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{2} - \frac{R^2}{3R}\right) = -\frac{c}{R} \\ c\ln R + d = V_0 \\ -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{4} - \frac{R^3}{9R}\right) + a = c\ln R + d \end{cases}$$

If we solve this system, we obtain

$$a = V_0 + \frac{5}{36}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R^2 \qquad c = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{6} \qquad d = V_0 + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{6}\ln R$$

Finally, inserting these three expressions in to the expressions of the electric field and potential, we obtain

$$V_{in}(\rho) = V_0 + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R^2\left(\frac{5}{36} - \frac{\rho^2}{4R^2} + \frac{\rho^3}{9R^3}\right)$$

$$V_{out}(\rho) = V_0 - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{6}\ln\frac{\rho}{R}$$

$$\bar{E}_{in}(\rho) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3R}\right)\hat{e}_\rho$$

$$\bar{E}_{out}(\rho) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{6}\frac{\hat{e}_\rho}{\rho}$$

---

(13) UPPGIFT 7

$$\bar{A} = \nabla \times \left[\frac{ln(x^2 + y^2 - 2x + 1)}{2}\hat{e}_z\right] = \nabla \times \left[ln\sqrt{(x^2 + y^2 - 2x + 1)}\hat{e}_z\right] = \nabla \times \left[ln\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\hat{e}_z\right]$$

We can change coordinate system to have:

$x' = x - 1$
And then use a cylindrical coordinate system with axis along the new z-axis, so that $\rho' = \sqrt{x'^2 + y^2}$:

$$\bar{A} = \nabla \times \left[ln\sqrt{x'^2 + y^2}\hat{e}_z\right] = \nabla \times [ln\rho' \hat{e}_z] = -\frac{1}{\rho'}\hat{e}_\varphi$$

Beräkna linjeintegralen:

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = -\underbrace{\oint_L \frac{1}{\rho}\hat{e}_\varphi \cdot d\bar{r}}_{-2\pi} = 2\pi \quad \text{see theorem 16.2.}$$

---

(14) UPPGIFT 8

$$\nabla \times \left((\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{b}\right) = \nabla \times \left((\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{r} - (\bar{r} \cdot \bar{b})\bar{a}\right) = \nabla \times \left((\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{r}\right) - \nabla \times \left((\bar{r} \cdot \bar{b})\bar{a}\right) =$$

$$= \underbrace{\nabla(\bar{a} \cdot \bar{b})}_{=0} \times \bar{r} + (\bar{a} \cdot \bar{b}) \underbrace{\nabla \times \bar{r}}_{=\bar{0}} - \nabla(\bar{r} \cdot \bar{b}) \times \bar{a} - (\bar{r} \cdot \bar{b}) \underbrace{\nabla \times \bar{a}}_{=\bar{0}} = -\nabla(\bar{r} \cdot \bar{b}) \times \bar{a} = \bar{a} \times \bar{b}$$

(note that $\nabla(\bar{r} \cdot \bar{b}) = \nabla(xb_x + yb_y + zb_z) = (b_x, b_y, b_z) = \bar{b}$)

So, we get:

$$\iint_S \nabla \times \left((\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{b}\right) \times d\bar{S} = \iint_S (\bar{a} \times \bar{b}) \times \underbrace{d\bar{S}}_{-Rdzd\varphi\hat{e}_\rho} = -R\iint_S (\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_\rho dzd\varphi$$

$$= -RL\int_0^\pi (\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_\rho d\varphi =$$

$$= -RL\int_0^\pi (\bar{a} \times \bar{b}) \times (cos\varphi\,\hat{e}_x + sin\varphi\,\hat{e}_y)d\varphi = -RL\int_0^\pi (\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_x cos\varphi d\varphi - RL\int_0^\pi (\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_y sin\varphi d\varphi$$

$$=$$

$$= -RL(\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_x \underbrace{\int_0^\pi cos\varphi d\varphi}_{=0} - RL(\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_y \underbrace{\int_0^\pi sin\varphi d\varphi}_{=2} = -2RL(\bar{a} \times \bar{b}) \times \hat{e}_y$$

Fusionplasmafysik
Skolan för Elektro- och Systemteknik
KTH, Teknikringen 31
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 08.00 - 11.00 måndagen den 22 oktober 2018

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Skrivtiden är tre timmar. Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p.
Den *teoretiska delen* utgörs av uppgifterna 1 och 2 och *beräkningsdelen* utgörs av uppgifterna 3 till 7.
Teoretiska delen, tillsammans med hemuppgifterna (HT 2018), kan maximalt ge 6 p.
Beräkningsdelen, tillsammans med grupp- & individuella uppgifter (HT 2018), kan maximalt ge 15 p.
För godkänt krävs minst 9 p sammanlagt.

Betyg:		FX	E	D	C	B	A
poäng:	7	9	11	13.5	16	18	

Dessutom:

- Betyg A: 18 p och 2 p från uppgift 6 och 2 p från uppgift 7
- Betyg B: 16 p och 2 p från uppgift 6 eller 2 p från uppgift 7

Miniräknare är *ej tillåten.*
Tillåtet:

- "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- vektoralgebra + kroklinjiga koord-system formler.

Lärare:

- Lorenzo Frassinetti
- Pablo Vallejos Olivares
- Kristoffer Lindvall
- Petter Ström
- Erik Saad

---

(1) Betrakta Stokes' sats.

(a) Bevisa satsen (för enkelhet, anta att banan L och ytan S ligger på xy-planet) **(2.5 p)**

(b) Beräkna cirkulationen av ett vektorfält $\overline{A}$ (definierat i ett sfäriskt koordinatsystem) längs en sluten kurva, L, vars form är okänd, med

$$\overline{A} = r^2 \hat{e}_r$$ **(0.25p)**

(c) förklara i ord resultatet från (b) **(0.25p)**

---

(2) Betrakta gradienten.

Bevisa att i koordinatsystemet (u_1, u_2, u_3) kan gradienten av ett skalärfält ϕ skrivas

$$\nabla\phi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\hat{e}_i$$, där h_i är skalfaktorer.

(3p)

---

(3)

(a) Använd indexräkning för att visa att:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right) - \nabla^2\overline{A}$$ **(1.5 p)**

Tips: $\left(\nabla^2\overline{A}\right)_i = \partial_j\partial_j A_i$ eller $\left(\nabla^2\overline{A}\right)_i = A_{i,jj} = \left(A_{i,j}\right)_{,j}$

(b) Betrakta vektorfältet $\bar{A} = \frac{1}{r}\hat{e}_r\cos(kr+\alpha)$ (i sfäriska koordinater) där k och α är konstanta skalärer och $\bar{r}$ är ortsvektorn.

Använd 3(a) för att visa:

$$\nabla^2\overline{A} = -\frac{2+k^2r^2}{r^2}\overline{A}.$$ **(1.5 p)**

---

(4) Betrakta följande elektrostatiska potential V i sfäriska koordinater:

$$V = r^2\sin\theta\sin\varphi$$

(a) Beräkna elektriska fältet $\bar{E} = -\nabla V$. **(1.0 p)**

(b) Beräkna ökningen per längdenhet (d.v.s. riktningsderivatan) av elektrostatiska potentialen på xy-planet i riktningen $\overline{n} = \hat{e}_x + \hat{e}_y$. **(1.0 p)**

(c) Arbetet W som det elektriska fältet utför på en partikel med laddningen q är:

$$W = \int_L q\overline{E}\cdot d\overline{r}$$

Partikeln rör sig längs banan L som definieras av

$$\begin{cases} z = \dfrac{2}{1+y^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

från punkten P_1 i $x=0,\ y=-1,\ z=1$ till punkten P_2 i $x=0,\ y=1,\ z=1$

Beräkna arbetet W. **(1.0 p)**

---

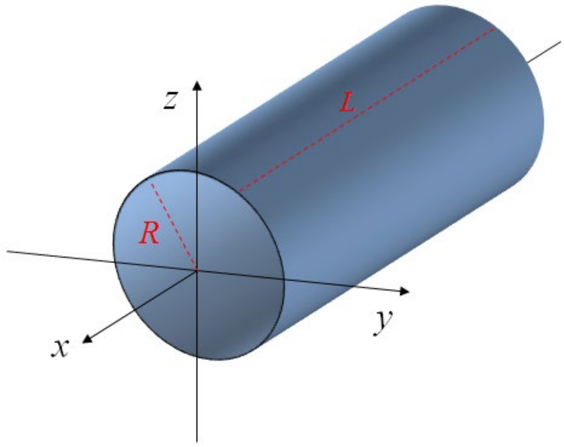
(5) $\bar{E}(\bar{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\bar{r}$. Fältets källa är en volym, V, med konstant laddningstäthet κ. Under dessa förutsättningar beräknas $\bar{E}(\bar{r})$ som:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \kappa \frac{(\bar{r}-\bar{r}')dV'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

där

- dV' är ett infinitesimalt volymelement i V,
- $\bar{r}'$ är en vektor från origo till dV',
- $\bar{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\bar{E}$).

Volymen V är en cylinder med radie R och längd L. Cylindern har axeln riktad längs x-axeln och sträcker sig från yz-planet till $x = -L$ (se figur).



Beräkna elektriska fältet $\bar{E}$ i origo genom att utföra följande steg:

(f) Uttryck dessa storheter i ett cylindriskt koordinatsystem anpassat till det givna problemets geometri:

dV'	**(0.1p)**
$\bar{r}'$	**(0.1p)**
$\bar{r}$	**(0.1p)**
$\lvert\bar{r}-\bar{r}'\rvert^3$	**(0.1p)**

(g) Beräkna

$\int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi$ **(0.6p)**

(h) Beräkna elektriska fältet $\bar{E}$ i origo. **(2.0p)**

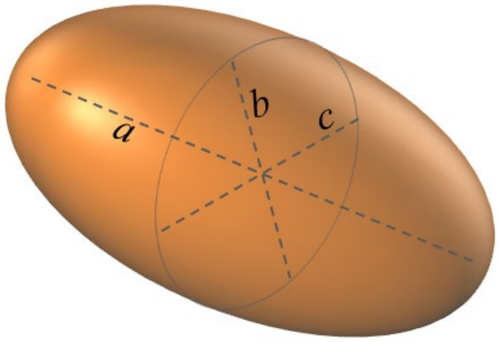
Tips: $$\int \frac{xdx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + c$$

---

(6) Beräkna flödet $\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$ av vektorfältet $\bar{A}$ genom ytan S, där S är ytan av en ellipsoid med **centrum i origo** och med radier $a = 6$, $b = 4$, $c = 4$ (se figur). Riktningarna för ellipsoidens tre axlar är okända. Vektorfältet definieras av:

$$\overline{A} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} + y^2\right)$$

Tips: ellipsoidens volym är $V = \frac{4}{3}\pi abc$.



---

(7) Betrakta vektorfältet $\bar{A} = (\bar{a} \times \bar{r}) \times \bar{b}$ med $\bar{a}$ och $\bar{b}$ två konstanta vektorer och med $\bar{r}$ ortsvektorn. Bevisa att

$$\oint_L \overline{A} \cdot d\overline{r} = -3\pi\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \hat{e}_z$$

där L är en ellips som ligger i xy-planet, med centrum i origo, storradie 3 längs y-axeln och lillradie 1 längs x-axeln. I punkten $x=0$, $y=3$, $z=0$ har L tangentvektor $\hat{e}_x$.

SOLUTIONS

PROBLEM (3)
(a)

Option 1

$$\left.\begin{aligned}&\overline{v}=\left(\nabla\times\overline{A}\right)\\&\left(\nabla\times\overline{v}\right)_i=\varepsilon_{ijk}v_{k,j}\\&v_k=\left(\nabla\times\overline{A}\right)_k=\varepsilon_{klm}a_{m,1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{klm}a_{m,1}\right)_{,j}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\left(a_{m,1}\right)_{,j}=$$

$$=\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\left(a_{m,1}\right)_{,j}=\delta_{il}\delta_{jm}\left(a_{m,1}\right)_{,j}-\delta_{im}\delta_{jl}\left(a_{m,1}\right)_{,j}=$$

$$=\delta_{il}\left(a_{\mathrm{j},1}\right)_{,j}-\delta_{im}\left(a_{m,j}\right)_{,j}=\left(a_{\mathrm{j,i}}\right)_{,j}-\left(a_{\mathrm{i},j}\right)_{,j}=$$

$$=\left(a_{\mathrm{j,j}}\right)_{,\mathrm{i}}-\left(a_{\mathrm{i},j}\right)_{,j}=\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)_{,i}-a_{\mathrm{i},jj}=\left(\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}\right)_i$$

Option 2

$$\left.\begin{aligned}&\overline{v}=\left(\nabla\times\overline{A}\right)\\&\left(\nabla\times\overline{v}\right)_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k\\&v_k=\left(\nabla\times\overline{A}\right)_k=\varepsilon_{klm}\partial_l a_m\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}\partial_l a_m\right)=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l a_m=$$

$$=\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j\partial_l a_m=\delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l a_m-\delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l a_m=$$

$$=\delta_{il}\partial_j\partial_l a_j-\delta_{im}\partial_j\partial_j a_m=\partial_j\partial_i a_j-\partial_j\partial_j a_i=$$

$$=\partial_i\partial_j a_j-\partial_j\partial_j a_i=\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)_{,i}-\left(\nabla^2\overline{A}\right)_i=\left(\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}\right)_i$$

(b)

$$\overline{A}=\frac{\hat{e}_r}{r}\cos\left(k\,r+\alpha\right)$$

$$\nabla\times\bar{A}=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_{\varphi}\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{\theta}}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_r+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_{\varphi}\right)\right)\hat{e}_{\theta}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_{\theta}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$A_r=\frac{1}{r}\cos\left(kr+\alpha\right)$$

$$A_{\theta}=0$$

$$A_{\varphi}=0$$

$$\Rightarrow\nabla\times\bar{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\hat{e}_{\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\hat{e}_{\varphi}=\bar{0}$$

$$\nabla\cdot\bar{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_{\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_{\varphi}\right)$$

$$A_r=\frac{1}{r}\cos\left(kr+\alpha\right)$$

$$A_{\theta}=0$$

$$A_{\varphi}=0$$

$$\Rightarrow\nabla\cdot\bar{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r}\cos\left(kr+\alpha\right)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\left(kr+\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\cos\left(kr+\alpha\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\left(kr+\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\cos\left(kr+\alpha\right)-\frac{k}{r}\cos\left(kr+\alpha\right)$$

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_{\varphi}$$

$$\Rightarrow\nabla\left(\nabla\cdot\bar{A}\right)=\frac{\partial\left(\nabla\cdot\bar{A}\right)}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial\left(\nabla\cdot\bar{A}\right)}{\partial\theta}}_{=0}\hat{e}_{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial\left(\nabla\cdot\bar{A}\right)}{\partial\varphi}}_{=0}\hat{e}_{\varphi}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\cos\left(kr+\alpha\right)-\frac{k}{r}\sin\left(kr+\alpha\right)\right)\hat{e}_r=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\cos\left(kr+\alpha\right)\right)\hat{e}_r-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\sin\left(kr+\alpha\right)\right)\hat{e}_r=$$

$$=-\frac{2}{r^3}\cos\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r-\frac{k}{r^2}\sin\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r+$$

$$+\frac{k}{r^2}\sin\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r-\frac{k^2}{r}\cos\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r=$$

$$=\left(-\frac{2}{r^3}-\frac{k^2}{r}\right)\cos\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r=-\frac{2+k^2r^2}{r^3}\cos\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow\quad\nabla^2\bar{A}=-\frac{2+k^2r^2}{r^3}\cos\left(kr+\alpha\right)\hat{e}_r=-\frac{2+k^2r^2}{r^2}\bar{A}$$

PROBLEM (4)

$$V = r^2 \sin\theta \sin\varphi$$

(a)

$$\overline{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi =$$

$$= -\frac{\partial r^2 \sin\theta \sin\varphi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial r^2 \sin\theta \sin\varphi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r^2 \sin\theta \sin\varphi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi =$$

$$= -2r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_r - r\cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_\theta - r\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

(b)

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}$$

$$\overline{n} = \hat{e}_x + \hat{e}_y \Rightarrow \hat{n} = \frac{\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{2}}$$

We are on the xy-plane, so $\theta = \pi/2$ and hence

$$\nabla V = 2r\sin\varphi\,\hat{e}_r + r\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

The scalar products are:

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_x = x/r$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y = y/r$$

$$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_x = -y/r$$

$$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_y = x/r$$

So,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n} = \left(2r\sin\varphi\,\hat{e}_r + r\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi\right)\cdot\frac{\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2}}\hat{e}_r\cdot\hat{e}_x + \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2}}\hat{e}_r\cdot\hat{e}_y + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}}\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_x + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}}\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_y =$$

$$= \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2}}\frac{x}{r} + \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2}}\frac{y}{r} - \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}}\frac{y}{r} + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}}\frac{x}{r} =$$

$$= \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}}\cos\varphi =$$

$$= \frac{\mathrm{r}\sin\varphi}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{2r}{\sqrt{2}}\sin^2\varphi + \frac{r}{\sqrt{2}}\cos^2\varphi = \frac{r}{\sqrt{2}}\left(\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi + 1\right)$$

(c)

$$W = \int_L q\overline{E}\cdot d\overline{r} = q\int_L \overline{E}\cdot d\overline{r} = -q\left[V\left(\overline{r}_{P2}\right) - V\left(\overline{r}_{P1}\right)\right] = V\left(\overline{r}_{P1}\right) - V\left(\overline{r}_{P2}\right)$$

$$V = r^2 \sin\theta \sin\varphi$$

P_1 : $x=0$, $y=-1$, $z=1$ $\Rightarrow$ $r=\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$, $\varphi = -\pi/2$

$$\Rightarrow V\left(\overline{r}_{P1}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$P_2: x=0,\ y=1,\ z=1 \Rightarrow r=\sqrt{2},\ \theta=\pi/4,\ \varphi=\pi/2 \Rightarrow V(\overline{r}_{P2}) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$$

$$W = V(\overline{r}_{P1}) - V(\overline{r}_{P2}) = -\sqrt{2}-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

PROBLEM (5)

It is simpler to rotates the coordinate system, so that the axis of the cylinder is along the z-axis and its base is on the xy-plane. In this way, we can use a "standard" cylindrical coordinate system.

(a)

$$dV' = \rho' d\rho' d\varphi' dz'$$

$$\overline{r} = \overline{0}$$

$$\overline{r}' = \rho'\hat{e}_\rho + z'\hat{e}_z$$

$$\overline{r} - \overline{r}' = -\rho'\hat{e}_\rho - z'\hat{e}_z$$

$$\left|\overline{r} - \overline{r}'\right|^3 = \left(\rho'^2 + z'^2\right)^{3/2}$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y\right) d\varphi = \hat{e}_x \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi + \hat{e}_y \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = \overline{0}$$

(c)

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \kappa \frac{(\bar{r}-\bar{r}')dV'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} = \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{(-\rho'\hat{e}_\rho - z'\hat{e}_z)\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}} =$$

$$= -\underbrace{\frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho'^2 \hat{e}_\rho d\rho' d\varphi' dz'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ because } \int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho d\varphi = 0} - \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{z'\hat{e}_z \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\int_0^L\int_0^R \frac{z'\rho' d\rho' dz'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}} = -\frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\int_0^L \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho'^2+z'^2}}\right]_0^R z'dz' =$$

$$= -\frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\int_0^L \left(\frac{1}{|z'|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z'^2}}\right) z'dz' = -\frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\int_0^L \frac{z'}{|z'|}dz' + \frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\int_0^L \frac{1}{\sqrt{R^2+z'^2}} z'dz' =$$

$$= -\frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}[z']_0^L + \frac{\kappa\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z'^2}\right]_0^L = \frac{\kappa}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+L^2} - R - L\right)\hat{e}_z$$

But we have rotated the coordinate system to have the axis of the cylinder along the z-axis. If we get back to the original coordinate system, we get as final answer:

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{\kappa}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+L^2} - R - L\right)\hat{e}_x$$

PROBLEM (6)

$$\bar{A} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} + y^2\right)$$

We could try by parameterizing the surface. But then the integral would be rather complicated.
The field is singular in the point $x=1, y=1, z=2$. The singularity is located $\sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$ far from the origin. The minor radius of the ellipsoid is 4. So, the singularity is inside the ellipsoid. Therefore, we cannot apply Gauss theorem directly.
We cannot use directly theorem 11.1 (Ramgard), because the field has not the same structure as in 11.1.
First, we can change the coordinate system, to have the singularity in the origin of the new coordinate system.

$$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y-1 \\ z' = z-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+y'^2}} + (y'+1)^2\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+y'^2}}\right) + \nabla\left((y'+1)^2\right)$$

Then we can take a spherical coordinate system centered in the new origin.

$$\overline{A} = \nabla\left(\frac{1}{r'}\right) + \nabla\left(\left(y'+1\right)^2\right) = -\frac{1}{r'^2}\hat{e}_{r'} + 2\left(y'+1\right)\hat{e}_{y'}$$

Now we can apply theorem 11.1 to the first term and the Gauss' theorem to the second term.

$$\iint_S \overline{A}\cdot d\overline{S} = \underbrace{-\iint_S \frac{1}{r'^2}\hat{e}_{r'}\cdot d\overline{S}}_{=-4\pi} + \underbrace{\iint_S 2\left(y'+1\right)\hat{e}_{y'}\cdot d\overline{S}}_{\text{we can apply Gauss' theorem}} =$$

$$= -4\pi + 2\iiint_V \underbrace{\nabla\cdot\left[\left(y'+1\right)\hat{e}_{y'}\right]}_{=1} dV = -4\pi + 2\iiint_V dV =$$

$$= -4\pi + 2\frac{4}{3}\pi\cdot 6\cdot 4\cdot 4 = -4\pi + 256\pi = 252\pi$$

PROBLEM (7)

The field is continuous and the curve is closed. We can apply Stoke's theorem.

$$\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \iint_S \nabla\times\overline{A}\cdot d\overline{S}$$

$$\nabla\times\overline{A} = \nabla\times\left((\overline{a}\times\overline{r})\times\overline{b}\right) = \nabla\times\left(\overline{r}\left(\overline{b}\cdot\overline{a}\right) - \overline{a}\left(\overline{b}\cdot\overline{r}\right)\right) =$$

$$= \nabla\times\left(\overline{r}\left(\overline{b}\cdot\overline{a}\right)\right) - \nabla\times\left(\overline{a}\left(\overline{b}\cdot\overline{r}\right)\right) =$$

$$= \left(\overline{b}\cdot\overline{a}\right)\underbrace{\nabla\times\overline{r}}_{=0} - \left(\overline{b}\cdot\overline{r}\right)\underbrace{\nabla\times\overline{a}}_{=0} + \overline{a}\times\nabla\left(\overline{b}\cdot\overline{r}\right) =$$

$$= \overline{a}\times\underbrace{\nabla\left(\overline{b}\cdot\overline{r}\right)}_{=\overline{b}} = \overline{a}\times\overline{b}$$

So, we get:

$$\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \iint_S \nabla\times\overline{A}\cdot d\overline{S} = \iint_S \overline{a}\times\overline{b}\cdot d\overline{S}$$

As surface, we can take the ellipses that lies on the xy-plane and has S as boundary. Note that the normal to the ellipses must be $-\hat{e}_z$, due to the orientation of the curve. So:

$$\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \iint_S \overline{a}\times\overline{b}\cdot d\overline{S} = -\iint_S \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\hat{e}_z dS = -\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\hat{e}_z \underbrace{\iint_S dS}_{3\pi} = -3\pi\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\hat{e}_z$$

Fusionplasmafysik
Skolan för Elektro- och Systemteknik
KTH, Teknikringen 31
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 09.00 - 12.00 lördagen den 21 oktober 2017
(+ egenrättning 12.00 – ca 13.00)
Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Skrivtiden är tre timmar. Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p.
Den *teoretiska delen* utgörs av uppgifterna 1 och 2 och *beräkningsdelen* utgörs av uppgifterna 3 till 7.
Teoretiska delen, tillsammans med hemuppgifterna (HT 2017), kan maximalt ge 6 p.
Beräkningsdelen, tillsammans med grupp- & individuella uppgifter (HT 2017), kan maximalt ge 15 p.
För godkänt krävs minst 9 p sammanlagt.

Betyg:	FX	E	D	C	B	A
poäng:	7	9	11	13.5	16	18

Dessutom:

- Betyg A: 18 p och 2 p från uppgift 6 och 2 p från uppgift 7
- Betyg B: 16 p och 2 p från uppgift 6 eller 2 p från uppgift 7

Miniräknare är *ej tillåten*.
Tillåtet: Mathematics Handbook (Beta) och vektoralgebra + kroklinjiga koord-system formler.

---

(1) Betrakta Gauss' sats.

a) Bevisa satsen med matematiska formler **(2 p)**
b) Förklara de logiska stegen i beviset med ord **(0.5 p)**
c) Beräkna flödet av ett vektorfält $\overline{A}$ (definierat i ett sfäriskt koordinatsystem):

$$\overline{A} = r^2 \hat{e}_\varphi$$

genom en kub med sida L och centrum i origo. **(0.25p)**

d) förklara i ord resultatet från (c) **(0.25p)**

---

(2) Bevisa att om ϕ har kontinuerliga andraderivator i området V samt är kontinuerlig i V och S så gäller:

$$\nabla^2 \phi = 0 \ \text{ i V och } \phi = 0 \text{ på S } \ \Rightarrow \ \ \phi = 0 \ \text{ i V}$$ **(3 p)**

---

(3) **(a)** Använd nablaräkning eller indexräkning för att bevisa **(1.0 p)**

$$\nabla \times \left(\phi \overline{A}\right) = \phi \nabla \times \overline{A} - \overline{A} \times \nabla \phi$$

(b) Använd 3(a) för att bevisa (i ett cylindriskt koordinatsystem)

$$\nabla \times \left(\phi(\rho)\hat{e}_\varphi\right) = \left(\frac{\phi(\rho)}{\rho} + \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho}\right)\hat{e}_z$$ **(2.0 p)**

---

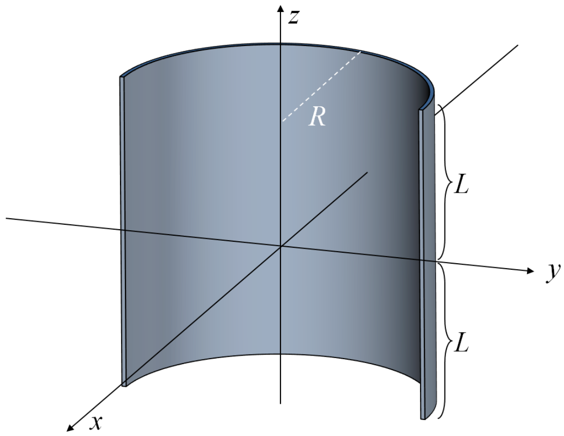
(4) $\overline{E}(\overline{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\overline{r}$. Fältets källa är en yta, S, med konstant laddningstäthet σ_0. Under dessa förutsättningar beräknas $\overline{E}(\overline{r})$ som:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\left(\overline{r} - \overline{r}\,'\right)\sigma_0 dS'}{\left|\overline{r} - \overline{r}\,'\right|^3}$$

där

- dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)
- $\overline{r}'$ är en vektor från origo till dS',
- $\overline{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\overline{E}$).

Ytan är en halv cylinder med radie R och höjd $2L$. Halvcylindern har axeln riktad längs z-axeln. Halvcylindern definieras som $x \le 0$. Se figur.



Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ i origo genom att utföra följande steg:

(i) Uttryck dessa storheter i ett cylindriskt koordinatsystem:

dS' **(0.25p)**

$\overline{r}'$ **(0.25p)**

$\overline{r}$ **(0.25p)**

$\left|\overline{r} - \overline{r}'\right|^3$ **(0.25p)**

(j) Beräkna

$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{e}_\rho d\varphi$ **(0.5p)**

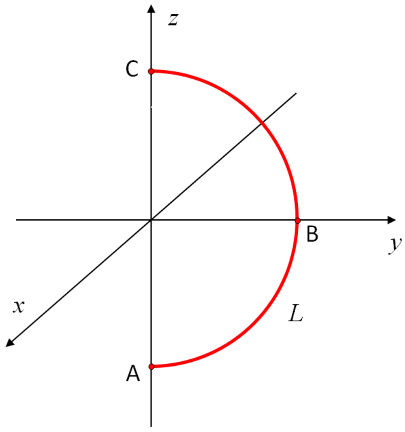
(k) Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ i origo. **(1.0p)**

Tips: $$\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + c$$

---

(5) Betrakta vektorfältet (i ett cylindriskt koordinatsystem)

$$\bar{E} = \left(2\rho\sin\varphi + 1\right)\hat{e}_\rho + \rho\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$



(a) Verifiera att $\bar{E}$ är konservativt **(1p)**

(b) Beräkna $\int\limits_L \bar{E}\cdot d\bar{r}$

(b1) från punkt A till punkt B
(b2) från punkt A till punkt C

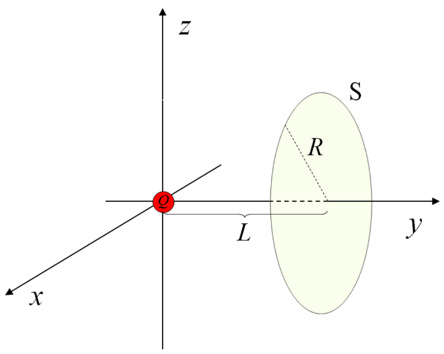
L: halvcirkel i yz-planet med radie R och centrum i origo
A och C ligger på z-axeln och B ligger på y-axeln.

(2p)

---

(6) Elektriska fältet $\bar{E}$ från en punktladdning Q som ligger i origo är:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r$$



Beräkna flödet av $\bar{E}$ genom en cirkulär skiva S som är parallel med xz-planet och ligger i y=L. Skivan har centrum på y-axeln och radie R. Normalen för S är $\hat{n} = \hat{e}_y$

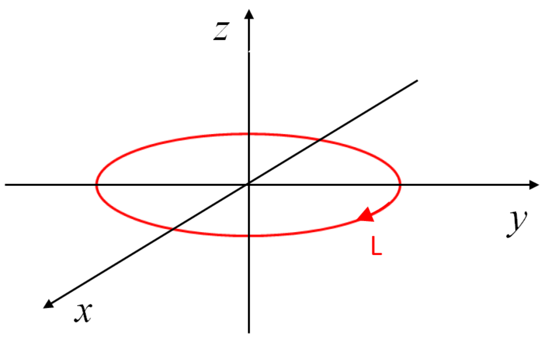
(3p)

Tips: $$\int \frac{xdx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + c$$

---

(7) Betrakta följande vektorfält (i cylindriska koordinater):

$$\bar{A} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho}\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho$$



Beräkna linjeintegralen $\oint\limits_L \bar{A}\cdot d\bar{r}$ där L är en ellips som ligger i xy-planet, med centrum i origo, storradie a längs y-axeln och lillradie b längs x-axeln. I punkten x=0, y=1, z=0 har L tangentvektor $\hat{e}_x$.

(3 p)

SOLUTIONS

PROBLEM 1

1(a,b) For the proof, see the Ramgard or the slides on canvas.

1(c) the divergence of the field is zero→the flux is zero

1(d)

- For full points (0.25p): the divergence of the field is zero→ the field is source-free
- Only part of the points if you have used arguments related to symmetry.

PROBLEM 2

See theorem 12.2 in the Ramgard

PROBLEM 3

3(a)

Option 1:

$$rot\left(\phi\bar{A}\right)=\nabla\times\left(\phi\bar{A}\right)=\nabla\times\left(\underset{\cdot}{\phi}\bar{A}\right)+\nabla\times\left(\phi\underset{\cdot}{\bar{A}}\right)=$$

$$\left\{=\bar{n}\times\left(\underset{\cdot}{c}\bar{a}\right)+\bar{n}\times\left(c\underset{\cdot}{\bar{a}}\right)=\left(\bar{n}\underset{\cdot}{c}\right)\times\bar{a}+c\left(\bar{n}\times\underset{\cdot}{\bar{a}}\right)=\right\}$$

$$=\left(\nabla\underset{\cdot}{\phi}\right)\times\bar{A}+\phi\left(\nabla\times\underset{\cdot}{\bar{A}}\right)=\left(\nabla\phi\right)\times\bar{A}+\phi\left(\nabla\times\bar{A}\right)=\phi\left(\nabla\times\bar{A}\right)-\bar{A}\times\left(\nabla\phi\right)$$

Option 2:

$$\nabla\times\left(\phi\bar{A}\right)=\nabla\phi\times\bar{A}+\phi\left(\nabla\times\bar{A}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\times\underbrace{\left(\phi\bar{A}\right)}_{\bar{v}}\\ \left(\nabla\times\bar{v}\right)_i=\varepsilon_{ijk}v_{k,\mathrm{j}}\\ v_k=\left(\phi A\right)_k=\phi A_k\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\nabla\times\left(\phi\bar{A}\right)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\left(\phi A_k\right)_{,\mathrm{j}}=$$

$$=\varepsilon_{ijk}\underbrace{\phi_{,\mathrm{j}}}_{(\nabla\phi)_j}A_k+\varepsilon_{ijk}\phi A_{k,\mathrm{j}}=\left(\nabla\phi\times\bar{A}\right)_{,i}+\phi\left(\nabla\times\bar{A}\right)_{,i}$$

3(b)

$$\nabla\times\left(\phi(\rho)\hat{e}_\varphi\right)=\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho}+\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\right)\hat{e}_z$$

using 3(a):

$$\nabla\times\left(\phi(\rho)\hat{e}_\varphi\right)=\left(\nabla\phi(\rho)\right)\times\hat{e}_\varphi+\phi(\rho)\left(\nabla\times\hat{e}_\varphi\right)$$

the scalar field is $\phi(\rho)$, so it depends only on the variable $\rho \Rightarrow$ the derivatives in z and φ are zero.

$$\nabla\phi(\rho)=\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\hat{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\varphi}}_{=0}\hat{e}_\varphi+\underbrace{\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial z}}_{=0}\hat{e}_z=\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\hat{e}_\rho$$

$$\nabla\times\overline{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{e}_\varphi+\left(\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\rho\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\rho\partial\varphi}\right)\hat{e}_z$$

using $\overline{A}=\hat{e}_\varphi \Rightarrow A_\rho=0, A_\varphi=1, A_z=0$

$$\Rightarrow\nabla\times\hat{e}_\varphi=\left(\frac{\partial\rho}{\rho\partial\rho}\right)\hat{e}_z=\frac{1}{\rho}\hat{e}_z$$

$$\nabla\times\left(\phi(\rho)\hat{e}_\varphi\right)=\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\underbrace{\hat{e}_\rho\times\hat{e}_\varphi}_{=\hat{e}_z}+\phi(\rho)\frac{1}{\rho}\hat{e}_z=\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\hat{e}_z+\phi(\rho)\frac{1}{\rho}\hat{e}_z=\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho}+\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\right)\hat{e}_z$$

PROBLEM 4

4(a)

$$dS' = R d\varphi' dz'$$
$$\bar{r} = \bar{0}$$
$$\bar{r}' = \mathrm{R}\hat{\mathrm{e}}_\rho + z'\hat{e}_z$$
$$\bar{r} - \bar{r}' = -\mathrm{R}\hat{\mathrm{e}}_\rho - z'\hat{e}_z$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{R^2 + z'^2}$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = \left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}$$

4(b)

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{e}_\rho d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos\varphi \hat{e}_x + \sin\varphi \hat{e}_y) d\varphi = [\sin\varphi]_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{e}_x + [-\cos\varphi]_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{e}_y = -2\hat{e}_x$$

4(c)

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{(\bar{r} - \bar{r}')\sigma_0 dS'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-R\hat{e}_\rho - z'\hat{e}_z}{\left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}} R d\phi' dz' =$$

$$= -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R\hat{e}_\rho}{\left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}} R d\phi' dz' - \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{z'\hat{e}_z}{\left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}} R d\phi' dz' =$$

$$= -\frac{\sigma_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\hat{e}_\rho d\phi'}{\left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz' - \frac{\sigma_0 R}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \underbrace{\int_{-L}^{L} \frac{z'\hat{e}_z}{\left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz'}_{\substack{=0 \\ \text{(the integrand is an odd function in z)}}} =$$

$$= -\frac{\sigma_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0} (-2\hat{e}_x) \int_{-L}^{L} \frac{1}{\left(R^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz' =$$

$$= \frac{\sigma_0 R^2}{2\pi\varepsilon_0} \hat{e}_x \left[\frac{z'}{R^2 \left(R^2 + z'^2\right)^{1/2}} \right]_{-L}^{L} = \frac{\sigma_0}{\pi\varepsilon_0} \frac{L}{\left(R^2 + L^2\right)^{1/2}} \hat{e}_x$$

PROBLEM 5

5(a)

A field is conservative if its curl is zero (done in week 3 of the course. See theorem 7.5 in Ramgard).

We need to calculate the curl in cylindrical coordinates:

$$\nabla\times\overline{E}=\left(\frac{\partial E_z}{\rho\partial\varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho+\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\hat{e}_\varphi+\left(\frac{\partial\left(\rho E_\varphi\right)}{\rho\partial\rho}-\frac{\partial E_\rho}{\rho\partial\varphi}\right)\hat{e}_z=$$

$$=\left(-\frac{\partial\rho\cos\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho+\left(\frac{\partial(2\rho\sin\varphi+1)}{\partial z}\right)\hat{e}_\varphi+\left(\frac{\partial\left(\rho^2\cos\varphi\right)}{\rho\partial\rho}-\frac{\partial(2\rho\sin\varphi+1)}{\rho\partial\varphi}\right)\hat{e}_z=$$

$$=0\hat{e}_\rho+0\hat{e}_\varphi+\left(2\frac{\rho}{\rho}\cos\varphi-2\rho\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\hat{e}_z=\overline{0}$$

The curl is zero. So the field is conservative.

Alternatively, you could have calculated the potential and then write explicitly that if the field has a potential then it is conservative.

5(b)

The field is conservative, so it has a potential $\overline{E}=\nabla\phi$. We can calculate the line integral using the potential:

$$\int_L \overline{E}\cdot d\overline{r}=\phi(\overline{r}_b)-\phi(\overline{r}_a)$$

To calculate the potential:

$$\overline{E}=(2\rho\sin\varphi+1)\hat{e}_\rho+\rho\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

we need to find a scalar field ϕ such that: $\overline{E}=\nabla\phi$

In a cylindrical coordinatesystem:

$$\overline{E}=\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\overline{E}=E_r\hat{e}_\rho+E_\varphi\hat{e}_\varphi+E_z\hat{e}_z=\underbrace{\left(2\rho\sin\varphi+1\right)}_{=E_r}\hat{e}_\rho+\underbrace{\rho\cos\varphi}_{=E_\varphi}\hat{e}_\varphi+\underbrace{0}_{=E_z}\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow E_r=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\Rightarrow 2\rho\sin\varphi+1=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\Rightarrow\phi\left(r,\varphi,z\right)=\int\left(2\rho\sin\varphi+1\right)d\rho=\rho^2\sin\varphi+\rho+F(\varphi,z)\qquad\text{(i)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} E_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi & \\ \textit{from}\ \text{(i)} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F(\varphi,z)}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial F(\varphi,z)}{\partial\varphi}=0\Rightarrow F(\varphi,z)=G(\text{z})\qquad\text{(ii)}$$

$$\textit{from}\ \text{(i) and (ii)}\ \Rightarrow\phi\left(r,\varphi,z\right)=\rho^2\sin\varphi+\rho+G(\text{z})\qquad\text{(iii)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} E_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}\Rightarrow\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 & \\ \textit{from}\ \text{(iii)} & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}=\frac{\partial G(z)}{\partial z}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial G(z)}{\partial z}=0\Rightarrow G(z)=c$$

$$\Rightarrow\phi\left(r,\varphi,z\right)=\rho^2\sin\varphi+\rho+c$$

The field is conservative, so it has a potential $\overline{E} = \nabla\phi$. We can calculate the line integral using the potential:

$$A: \rho_a = 0, \quad z_a = -R$$
$$B: \rho_b = R, \quad \varphi_b = \pi/2, \quad z_b = 0$$
$$\mathrm{C}: \rho_c = 0, \quad z_c = R$$
$$\phi(\overline{r_a}) = c$$
$$\phi(\overline{r_b}) = R^2 + R + c$$
$$\phi(\overline{r_c}) = c$$
$$\int_A^B \overline{E} \cdot d\overline{r} = \phi(\overline{r_b}) - \phi(\overline{r_a}) = R^2 + R \qquad \text{and} \qquad \int_A^C \overline{E} \cdot d\overline{r} = \phi(\overline{r_c}) - \phi(\overline{r_c}) = 0$$

ALTERNATIVE APPROACH for 5(b)

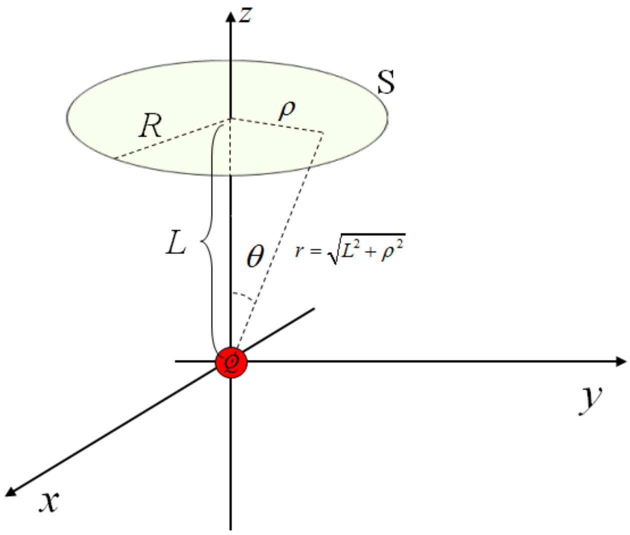
You could try to calculate the line integral directly without determining the potential.
This is possible, but it is rather challenging. Note that the path is on the yz-plane, so you cannot simply use the standard cylindrical parameterization for the path. This makes this approach very difficult.
I did not try to use it, but if you have done it correctly, you will get points. However, if you have used a standard cylindrical parameterization, you will get zero points for this part (it is really a major error).

PROBLEM 6

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r$$

We need to calculate $\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{S}$

Due to the symmetry of the problem, as long as S has the normal parallel to the field and as long as S has distance L from the origin, we can move the surface without changing the value flux. It is convenient to consider that the surface as perpendicular to the z-axis (see figure)



$$d\bar{S} = 2\pi\rho d\rho\hat{e}_z$$

$$\bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r\cdot(2\pi\rho d\rho\hat{e}_z)$$

$$r = \sqrt{L^2+\rho^2}$$

$$\hat{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi)\hat{e}_x + (\sin\theta\sin\varphi)\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \hat{e}_r\cdot\hat{e}_z = \cos\theta$$

$$\cos\theta = L/\sqrt{L^2+\rho^2}$$

$$\Rightarrow \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{L\rho d\rho}{\left(L^2+\rho^2\right)^{3/2}}$$

$$\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \int_0^R \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{L\rho d\rho}{\left(L^2+\rho^2\right)^{3/2}} = \frac{QL}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left(L^2+\rho^2\right)^{3/2}} = \frac{QL}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(L^2+\rho^2\right)^{1/2}}\right]_0^R = \frac{QL}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)$$

Alternative approach

It is possible to solve the problem keeping the surface on its original position. It is a bit more challenging from a geometrical point of view, but the logic is similar.

PROBLEM 7

The path is closed, but we cannot used the Stokes theorem directly. The field is not continuous on the z-axis and the path is around the z-axis.
However we can use theorem 11.2:

$$\oint_L \frac{k}{\rho}\hat{e}_\varphi \cdot d\overline{r} = 2\pi kN$$

$$\overline{A} = \frac{\rho^2+1}{\rho}\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho = \rho\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho$$

step (I) $$\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \underbrace{\oint_L \left(\rho\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho\right)\cdot d\overline{r}}_{\text{we can apply Stokes}} + \underbrace{\oint_L \frac{1}{\rho}\hat{e}_\varphi \cdot d\overline{r}}_{-2\pi} = \iint_S \nabla\times\left(\rho\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho\right)\cdot d\overline{S} - 2\pi$$

(remember that the field is in a cylindrical coordinate system)
(-2π because the orientation of the curve is $-\hat{e}_\varphi$)

step (II) $$\nabla\times\left(\rho\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho\right) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial\rho^2}{\partial z}\right)\hat{e}_\varphi + \left(\frac{\partial\left(\rho^2\right)}{\rho\partial\rho} - \frac{\partial\rho^2}{\rho\partial\varphi}\right)\hat{e}_z = 2\hat{e}_z$$

step (III) $d\overline{S} = -dS\hat{e}_z$ (this is because the orientation of the curve is $-\hat{e}_\varphi$)

step (IV) $$\iint_S \nabla\times\left(\rho\hat{e}_\varphi + \rho^2\hat{e}_\rho\right)\cdot d\overline{S} = \iint_S 2\hat{e}_z\cdot(-dS\hat{e}_z) = -2\iint_S dS = -2\pi ab$$

step (V) $$\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = -2\pi ab - 2\pi = -2\pi(1+ab)$$

Fusionplasmafysik
Skolan för Elektro- och Systemteknik
KTH, Teknikringen 31
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 08.00 - 11.00 lördagen den 20 oktober 2016
(+ egenrättning 11.00 – ca 12.00)

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad. Skrivtiden är tre timmar. Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p. Den *teoretiska delen* utgörs av uppgifterna 1 och 2 och *beräkningsdelen* utgörs av uppgifterna 3 till 7. Teoretiska delen tillsammans med hemuppgifterna (HT 2016) kan maximalt ge 6 p och beräkningsdelen tillsammans med grupp- & individuella-uppgifter (HT 2016) kan maximalt ge 15 p. För godkänt krävs minst 9 p sammanlagt.
Miniräknare är ej tillåten.
Du kan använda Mathematics Handbook (Beta) och vektor algebra + kroklinjiga koordinatsystem formler.

---

(3) Stokes sats

a) Skriv ner Stokes sats samt dess villkor. **(0.25 p)**

b) Bevisa satsen. **(2.00 p)**

c) Betrakta fältet $\bar{A}$ i ett cylindriskt koordinatsystem:

$$\bar{A} = \frac{\hat{e}_z}{\rho}$$

Går det att använda Stokes sats för att beräkna $\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$ längs en sluten kurva som omsluter *z*-axeln? Motivera ditt svar. **(0.75p)**

---

(4) Bevisa att om ϕ har kontinuerliga andraderivator i området V samt är kontinuerlig i V och S så gäller:

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ i V och } \phi = 0 \text{ på S} \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \text{ i V}$$ **(3 p)**

---

(3) (a) Använd nablaräkning eller indexräkning för att bevisa: **(1.0 p)**

$$\nabla \times \left(\nabla \times \overline{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \overline{A}\right) - \nabla^2 \overline{A}$$

(b) Använd 3(a) för att beräkna: $\nabla^2 \hat{e}_r$ (i sfäriska koordinater) **(1.0 p)**

(c) Betrakta Maxwells ekvationer i vacuum och i ett laddningsfritt och strömfritt område:

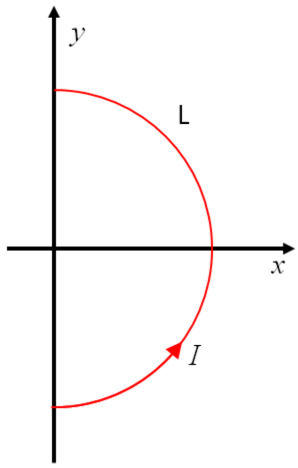
$$\begin{cases} \nabla \cdot \overline{E} = 0 \\ \nabla \times \overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \overline{B} = 0 \\ \nabla \times \overline{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Använd 3(a) for att bevisa: $\nabla^2 \overline{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2}$ **(1.0 p)**

---

(4) En elektrisk ström I går i en **halv** cirkulär spole L med radie r_0. Spolen ligger på planet z = 0 och har centrum i origo (se figur). Biot-Savarts lag lyder:

$$\overline{B}(\overline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\overline{l}' \times (\overline{r} - \overline{r}')}{\left|\overline{r} - \overline{r}'\right|^3}$$



där:

$d\overline{l}'$ är ett infinitesimalt längdelement längs spolen (kurvan L),
$\overline{r}'$ är en vektor från origo till $d\overline{l}'$,
$\overline{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\overline{B}$).

Beräkna magnetfältet $\overline{B}$ längs z-axeln genom att utföra följande steg:

(l) **Uttryck dessa storheter i ett cylindriskt koordinatsystem** (använd $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$):

$d\overline{l}'$ **(0.2p)**
$\overline{r}'$ **(0.2p)**
$\overline{r}$ **(0.2p)**
$d\overline{l}' \times (\overline{r} - \overline{r}')$ **(0.2p)**
$\left|\overline{r} - \overline{r}'\right|^3$ **(0.2p)**

(m) **Beräkna i ett cylindriskt koordinatsystem:**

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_\rho d\varphi$ **(0.25p)**
$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_z d\varphi$ **(0.25p)**

(n) **Beräkna magnetfältet $\overline{B}$ längs z-axeln som produceras av spolströmmen.** **(1.5p)**

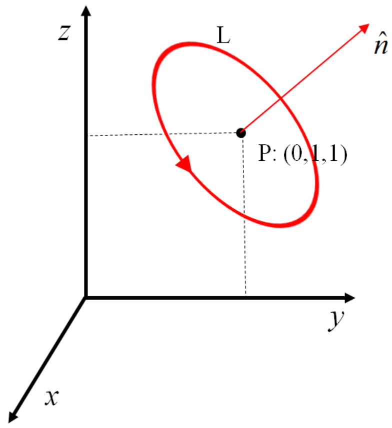
---

(5) Betrakta vektorfältet (i ett cylindriskt koordinatsystem):

$$\bar{A} = A_0 \rho \hat{e}_\varphi$$

Låt L vara en cirkel med radien r_0 och med centrum i punkten P definierad av $x=0,\ y=1,\ z=1$. Normalen till cirkeln L ligger i yz-planet och har en lutning på 45° från y-axeln.

Beräkna linjeintegralen: $\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$



---

(6) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\bar{A} = z\hat{e}_z$$

genom den öppna ytan S.

$$S: \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} \\ y \le 1 \\ z \ge 0 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y \ge 0 \end{cases}$$

Notera att planen y=1 och z=0 inte ingår i S. Villkoren på y och z anger endast var S avgränsas.

---

(7) Betrakta en stel cirkulär spole L med radie R. Spolen har centrum i origo och ligger **i planet $x=0$**. Laddningstätheten i spolen beskrivs av: $\lambda_l = \lambda_0 \cos\theta$

I origo det finns en elektriskt laddad partikel med laddning Q som generar ett elektriskt fält som beskrivs av:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r$$

Den infinitesimala laddningen dq på ett längdelement dl är: $dq = \lambda_l dl$

Kraften på dq som produceras av elektriska fältet är: $d\bar{F} = \bar{E} dq$

(a) Beräkna den totala elektriska laddningen i övre delen av spolen (z>0). **(0.5 p)**
(b) Beräkna den totala elektriska laddningen i spolen. **(0.5 p)**
(c) Beräkna den totala kraften på spolen. **(2.0 p)**

SOLUTIONS

PROBLEM 3

3(a)

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)=\nabla\times\left(\nabla\times\underset{\cdot}{\overline{A}}\right)=$$

$$\overline{n}\times\left(\overline{n}\times\overline{c}\right)=\overline{n}(\overline{n}\cdot\overline{c})-\overline{c}(\overline{n}\cdot\overline{n})$$

$$=\nabla\left(\nabla\cdot\underset{\cdot}{\overline{A}}\right)-(\nabla\cdot\nabla)\underset{\cdot}{\overline{A}}=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}$$

$$\Rightarrow\quad\nabla^2\overline{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)$$

3(b)

$$\nabla\cdot\overline{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right)$$

with $\overline{A}=\hat{e}_r=(1,0,0)$ we get:

$$\nabla\cdot\hat{e}_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right)=\frac{2}{r}$$

$$rot\overline{A}=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_r+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\hat{e}_\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_\varphi$$

with $\overline{A}=\hat{e}_r=(1,0,0)$

We obtain: $\quad rot\,\hat{e}_r=\left(0,0,0\right)$

$$\nabla^2\hat{e}_r=\nabla\left(\nabla\cdot\hat{e}_r\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\hat{e}_r\right)=\nabla\left(\frac{2}{r}\right)-\nabla\times(0,0,0)=-\frac{2}{r^2}\hat{e}_r+0\hat{e}_\theta+0\hat{e}_\varphi=-\frac{2}{r^2}\hat{e}_r$$

3(c)

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\left(\nabla\times\overline{E}\right)=\nabla\overbrace{\left(\nabla\cdot\overline{E}\right)}^{=0}-\nabla^2\overline{E}=-\nabla^2\overline{E}\\&\nabla\times\left(\nabla\times\overline{E}\right)=\nabla\times\left(-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\overline{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla^2\overline{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}$$

PROBLEM 4

4(a)

$$\bar{r} = z\hat{e}_z$$
$$\bar{r}' = r_0\hat{e}_\rho$$
$$d\bar{l}' = r_0 d\varphi\hat{e}_\varphi$$
$$\bar{r} - \bar{r}' = -r_0\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{r_0^2 + z^2}$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = \left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}$$
$$d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}') = zr_0 d\varphi\hat{e}_\rho + r_0^2 d\varphi\hat{e}_z$$

4(b)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_\rho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos\varphi\hat{e}_x + \sin\varphi\hat{e}_y\right) d\varphi = [\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{e}_x + [-\cos\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{e}_y = 2\hat{e}_x$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_z d\varphi = \hat{e}_z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \pi\,\hat{e}_z$$

4(c)

$$\bar{B}(\bar{\mathrm{r}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{zr_0 d\phi\hat{e}_\rho + r_0^2 d\phi\hat{e}_z}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{zr_0\hat{e}_\rho}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} d\phi + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r_0^2\,\hat{e}_z}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} d\phi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{zr_0}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_\rho d\phi + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r_0^2}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_z d\phi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{zr_0}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} 2\hat{e}_x + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r_0^2}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}\pi\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}\left(2zr_0\hat{e}_x + \pi r_0^2\,\hat{e}_z\right)$$

PROBLEM 5

$$\left.\begin{array}{l}\oint\limits_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_S rot\overline{A}\cdot d\overline{S} \\ rot\overline{A} = 2A_0\hat{e}_z \\ \hat{n} = \dfrac{\hat{e}_y + \hat{e}_z}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\limits_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_S 2A_0\hat{e}_z\cdot\hat{n}dS = 2A_0\iint\limits_S \hat{e}_z\cdot\frac{\hat{e}_y+\hat{e}_z}{\sqrt{2}}dS = 2A_0\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{2}}dS = \sqrt{2}A_0\iint\limits_S dS = \sqrt{2}A_0\pi r_0^2$$

PROBLEM 6

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\varphi \\ z = 3\rho\sin\varphi \\ y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = \rho^2 \end{cases}$$

$$\overline{r}(\rho,\varphi) = \left(2\rho\cos\varphi, \rho^2, 3\rho\sin\varphi\right)$$

$$\varphi : 0 \to \pi$$

$$\rho : 0 \to 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial\rho} = \left(2\cos\varphi, 2\rho, 3\sin\varphi\right) \\ \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi} = \left(-2\rho\sin\varphi, 0, 3\rho\cos\varphi\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi} = \left(6\rho^2\cos\varphi, -6\rho, 4\rho^2\sin\varphi\right) = \overline{n}$$

but $\overline{n}\cdot\hat{e}_y$ must be >0 $\Rightarrow$ the sign must be changed.

$$\overline{A} = z\hat{e}_z = 3\rho\sin\varphi\hat{e}_z$$

$$\iint\limits_{-s} \overline{A}\cdot d\overline{S} = \iint\limits_{-s} \overline{A}(\overline{r}(\rho,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\right)d\rho d\varphi$$

$$= -\int_0^1\int_0^\pi 3\rho\sin\varphi\hat{e}_z\cdot\left(6\rho^2\cos\varphi, -6\rho, 4\rho^2\sin\varphi\right)d\rho d\varphi = -\int_0^1\int_0^\pi 12\rho^3\sin^2\varphi d\rho d\varphi =$$

$$-12\int_0^1 \rho^3 d\rho\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^\pi = -6\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\pi$$

PROBLEM 7

due to the symmetry of the problem, we can use a spherical coordinate system
with the angle φ defined in the range $\varphi : 0 \to \pi$ and
with the angle θ defined in the range $\theta : 0 \to 2\pi$

(a) $\quad dq = \lambda_0 \cos\theta R d\theta$

$$Q_{upper} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 \cos\theta R d\theta = \lambda_0 R \left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\lambda_0 R$$

(b) $$Q_{tot} = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos\theta R d\theta = \lambda_0 R \left[\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

(c) $$d\bar{F} = \bar{E} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{e}_r \, \lambda_0 \cos\theta R d\theta = \frac{\lambda_0 \mathrm{Q} \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} \hat{e}_r d\theta$$

the coil is in the plane x=0 $\Rightarrow \; \varphi = \pi/2 \Rightarrow \hat{e}_r = \sin\theta \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z$

$$\bar{F} = \oint_L d\bar{F} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \mathrm{Q} \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} \hat{e}_r d\theta = \frac{\lambda_0 \mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos\theta \left(\sin\theta \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z\right) d\theta =$$

$$= \frac{\lambda_0 \mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R} \hat{e}_y \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta}_{=0} + \frac{\lambda_0 \mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R} \hat{e}_z \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\lambda_0 \mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R} \hat{e}_z \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\lambda_0 \mathrm{Q}}{4\varepsilon_0 R} \hat{e}_z$$

Fusionplasmafysik
Skolan för Elektro- och Systemteknik
KTH, Teknikringen 31
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 09.00 - 12.00 lördagen den 24 oktober 2015
(+ egenrättning 12.00 – ca 13.00)

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad. Skrivtiden är tre timmar. Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p. Den *teoretiska delen* utgörs av uppgifterna 1 och 2 och *beräkningsdelen* utgörs av uppgifterna 3 till 7. Teoretiska delen tillsammans med hemuppgifterna (HT 2015) kan maximalt ge 6 p och beräkningsdelen tillsammans med grupp- & individuella-uppgifter (HT 2015) kan maximalt ge 15 p. För godkänt krävs minst 9 p sammanlagt.
Miniräknare är ej tillåten.
Du kan använda Mathematics Handbook (Beta) och vektor algebra + kroklinjiga koordinatsystem formler.

---

(5) Bevisa Gauss' sats:

a) Skriv ner de logiska stegen i beviset i ord **(1 p)**
b) Bevisa satsen med matematiska formler **(2 p)**

---

(6) Bevisa att i koordinatsystemet (u_1, u_2, u_3) kan gradienten av ett skalärfält ϕ skrivas

$$grad\phi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\hat{e}_i$$, där h_i är skalfaktorer.

(3p)

V. G. Vänd!

---

(3) (a) Använda nablaräkning för att bevisa: **(1.5 p)**

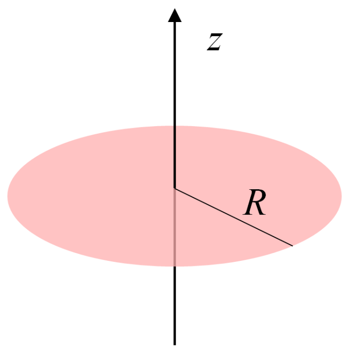
$$\nabla^2 \overline{A} = \nabla\left(\nabla \cdot \overline{A}\right) - \nabla \times \left(\nabla \times \overline{A}\right)$$

(b) Använd 3(a) for att, i sfäriska koordinater, beräkna: $\nabla^2 \hat{e}_r$ **(1.5 p)**

---

(4) $\overline{E}(\overline{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\overline{r}$. Fältets källa är en yta, S, med konstant laddningstäthet σ_0. Under dessa förutsättningar beräknas $\overline{E}(\overline{r})$ som:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\left(\overline{r} - \overline{r}\,'\right)\sigma_0 dS'}{\left|\overline{r} - \overline{r}\,'\right|^3}$$



där:

dS' är ett infinitesimalt ytelement på S' (ej riktat)

$\overline{r}\,'$ är en vektor från origo till dS',

$\overline{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\overline{E}$).

Ytan är en cirkulär skiva som ligger i xy-planet ($z=0$). Skivan har centrum i origo och radie R.

Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ <u>längs *z*-axeln</u> genom att utföra följande steg:

(o) Uttryck dessa storheter i ett cylindriskt koordinatsystem (använd $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$):

dS' **(0.25p)**

$\overline{r}\,'$ **(0.25p)**

$\overline{r}$ **(0.25p)**

$\left|\overline{r} - \overline{r}\,'\right|^3$ **(0.25p)**

(p) Visa att:

$\int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi = 0$ **(0.5p)**

(q) Beräkna elektriska fältet $\overline{E}$ längs *z*-axeln som produceras av skivan. **(1.0p)**

Tips: $\displaystyle\int \frac{x dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + c$

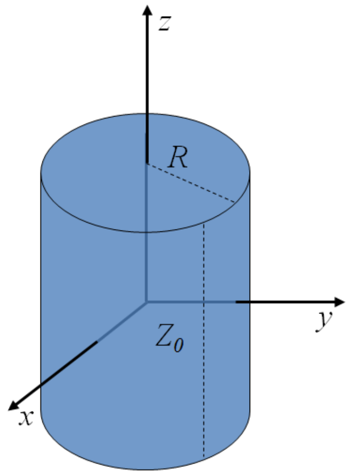
V. G. Vänd!

---

(5) Betrakta följande vektorfält (i sfäriska koordinater): **(3 p)**

$$\bar{A} = \frac{3 + r^4 \sin\theta}{r^2}\hat{e}_r + r^2\hat{e}_\varphi$$

Beräkna flödet av vektorfältet ut genom en cylinderyta S med radien R, axel längs $\hat{e}_z$, längd Z_0 och centrum i origo. Flödet genom cylinderns två cirkulära lock skall medräknas (S är en sluten yta).



---

(6) Betrakta följande elektriska fält i cylinderkoordinater: **(3 p)**

$$\bar{E} = 2\rho\sin\varphi\hat{e}_\rho + \rho\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

Kraften som det elektriska fältet $\bar{E}$ utövar på en partikel med laddningen q är $\bar{F} = q\bar{E}$. Partikeln rör sig från punkten P_1 i $x=0, y=1, z=0$ till punkten P_2 i $x=1, y=0, z=2$ längs en skruvformad bana, L, som följer en cylinderyta. Cylindern har z-axeln som centralaxel och radie $R=1$.

Beräkna arbetet W som det elektriska fältet utför på partikeln:

$$W = \int_L q\bar{E} \cdot d\bar{r}$$

---

(7) Kraften på en ledare L med den elektriska strömmen I, i det magnetiska fältet $\bar{B}$ är:

$$\bar{F} = I\int_L \left(d\bar{l} \times \bar{B}\right)$$

Beräkna kraften $\bar{F}$ på en cirkulär strömslinga L (radie R och centrum i origo). L ligger i xy-planet (Z=0) och omsluter z-axeln en gång. Magnetiska fältet $\bar{B}$ definieras i cylinderkoordinater:

$$\bar{B} = B_0\rho\left(\cos\varphi\,\hat{e}_z + \sin\varphi\,\hat{e}_\varphi\right)$$

Använd följande steg:

(a) uttryck $d\bar{l}$ i ett cylindriskt koordinatsystem (0.5p)

(b) beräkna $d\bar{l} \times \bar{B}$ i ett cylindriskt koordinatsystem (1.0p)

(c) integrera och beräkna $\bar{F}$ (Du kan här använda ett kartesiskt koord-system) (1.5p)

tips: $\int \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + c$

SOLUTIONS

PROBLEM 3

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)=\nabla\times\left(\nabla\times\underset{\cdot}{A}\right)= \qquad\qquad \overline{n}\times\left(\overline{n}\times\overline{c}\right)=\overline{n}(\overline{n}\cdot\overline{c})-\overline{c}(\overline{n}\cdot\overline{n})$$

$$=\nabla\left(\nabla\cdot\underset{\cdot}{A}\right)-(\nabla\cdot\nabla)\underset{\cdot}{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla^2\overline{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)$$

$$\nabla\cdot\overline{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right)$$

$$with\ \overline{A}=\hat{e}_r=(1,0,0)\quad \text{we}\quad \text{get}:$$

$$\nabla\cdot\hat{e}_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right)=\frac{2}{r}$$

$$rot\overline{A}=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_r+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\hat{e}_\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_\varphi$$

$$with\ \overline{A}=\hat{e}_r=(1,0,0)$$

We obtain: $rot\,\hat{e}_r=\left(0,0,0\right)$

$$\nabla^2\hat{e}_r=\nabla\left(\nabla\cdot\hat{e}_r\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\hat{e}_r\right)=\nabla\left(\frac{2}{r}\right)-\nabla\times(0,0,0)=-\frac{2}{r^2}\hat{e}_r+0\hat{e}_\theta+0\hat{e}_\varphi=-\frac{2}{r^2}\hat{e}_r$$

PROBLEM 4

$$\overline{E}(\overline{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma_0\left(\overline{r}-\overline{r}'\right)dS'}{\left|\overline{r}-\overline{r}'\right|^3}$$

(a)

$$dS'=\rho' d\varphi' d\rho'$$

$$\overline{r}'=\rho'\hat{e}'_\rho$$

$$\overline{r}=z\hat{e}_z$$

$$(\overline{r}-\overline{r}')=z\hat{e}_z-\rho'\hat{e}'_\rho\quad\Rightarrow\quad\left|\overline{r}-\overline{r}'\right|=\sqrt{z^2+\rho'^2}\quad\Rightarrow\quad\left|\overline{r}-\overline{r}'\right|^3=\left(z^2+\rho'^2\right)^{3/2}$$

(b)

$$\int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}(\cos\varphi\hat{e}_x+\sin\varphi\hat{e}_y)d\varphi=\hat{e}_x[\sin\varphi]_0^{2\pi}+\hat{e}_y[-\cos\varphi]_0^{2\pi}=0\hat{e}_x+0\hat{e}_y=0$$

(c)

$$\bar{E}(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma_0(\bar{r}-\bar{r}')dS'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma_0(z\hat{e}_z-\rho'\hat{e}'_\rho)\rho' d\varphi' d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}=$$

$$\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho'=0}^{\rho'=R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{z\hat{e}_z\rho' d\varphi' d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}-\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho'\hat{e}'_\rho\rho' d\varphi' d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}=$$

$$\frac{2\pi z\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z\int_{\rho'=0}^{\rho'=R}\frac{\rho' d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}-\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho'=0}^{\rho'=R}\left(\frac{\rho'^2 d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\hat{e}'_\rho d\varphi'\right)=$$

$$\frac{z\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z\left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}\right]_0^R=\frac{z\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z\left(\frac{1}{\sqrt{z^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z\left(\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

PROBLEM 5

$$\int_s\bar{A}\cdot d\bar{S}=\int_s\left(\frac{3+r^4\sin\theta}{r^2}\hat{e}_r+r^2\hat{e}_\varphi\right)\cdot d\bar{S}=\int_s\left(\frac{3}{r^2}\hat{e}_r+r^2\sin\theta\hat{e}_r+r^2\hat{e}_\varphi\right)\cdot d\bar{S}=$$

$$\int_s\left(\frac{3}{r^2}\hat{e}_r\right)\cdot d\bar{S}+\int_s\left(r^2\sin\theta\hat{e}_r+r^2\hat{e}_\varphi\right)\cdot d\bar{S}=$$

$$12\pi+\int_V\nabla\cdot\left(r^2\sin\theta\hat{e}_r+r^2\hat{e}_\varphi\right)dV=$$

$$\left\{\begin{aligned}&\text{in a spherical coordinate system: }\nabla\cdot\bar{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\varphi)\\&\text{so: }\nabla\cdot\left(r^2\sin\theta\hat{e}_r+r^2\hat{e}_\varphi\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^4\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2)=\frac{4r^3\sin\theta}{r^2}=4r\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

$$=12\pi+\int_V 4r\sin\theta dV=$$

$\{$Note that the volume is a cylinder. And that $r\sin\theta=\rho\}$

$$=12\pi+\int_V 4\rho dV=12\pi+\int_V 4\rho^2 d\varphi d\rho dz=12\pi+8\pi Z_0\int_V\rho^2 d\rho=12\pi+8\pi Z_0\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^R=12\pi+\frac{8}{3}\pi Z_0R^3$$

PROBLEM 6

Let's calculate the potential of the vector field.
The field is defined in a cylindrical coordinate system, so we need to use the gradient in a cylindrical coordinate system.

$$\nabla\phi = \overline{E} \quad \Rightarrow \int_L q\overline{E}\cdot d\overline{r} = q\int_L \overline{E}\cdot d\overline{r} = q\left(\phi(P_2)-\phi(P_1)\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = 2\rho\sin\varphi \Rightarrow \phi = \rho^2\sin\varphi + f(\varphi,z)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi\\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial\varphi}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow f(\varphi,z) = c + g(z)$$

$$\Rightarrow \phi = \rho^2\sin\varphi + g(z) + c$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0\\ &\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial g(z)}{\partial z}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow g(z) = k$$

$$\Rightarrow \phi = \rho^2\sin\varphi + c + k \quad \textit{or simpler}: \quad \phi = \rho^2\sin\varphi + a$$

$$\left.\begin{aligned}&W = \int_L q\overline{E}\cdot d\overline{r} = q\int_L \overline{E}\cdot d\overline{r} = q\left(\phi(P_2)-\phi(P_1)\right)\\ &P_1: \quad x=0, y=1, z=0 \Rightarrow \rho=1, \varphi=\frac{\pi}{2}, z=0\\ &P_2: \quad x=1, y=0, z=2 \Rightarrow \rho=1, \varphi=0, z=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow W = q\left(\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2}\right) = -q$$

PROBLEM 7

$$d\overline{l} = \rho d\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$d\overline{l}\times\overline{B} = \rho d\varphi\hat{e}_\varphi \times B_0\rho(\cos\varphi\hat{e}_z + \sin\varphi\hat{e}_\varphi) = B_0\rho^2\cos\varphi d\varphi\hat{e}_\rho$$

$$\overline{F} = I\int_0^{2\pi} B_0\rho^2\cos\varphi d\varphi\hat{e}_\rho = IB_0R^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\hat{e}_\rho d\varphi = IB_0R^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi(\cos\varphi\hat{e}_x + \sin\varphi\hat{e}_y)d\varphi =$$

$$IB_0R^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\hat{e}_x d\varphi = IB_0R^2\hat{e}_x\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = IB_0R^2\hat{e}_x\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = IB_0R^2\pi\,\hat{e}_x$$

Fusionplasmafysik
Skolan för Elektro- och Systemteknik
KTH, Teknikringen 31
Lorenzo Frassinetti – Jan Scheffel

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 09.00 - 12.00 fredagen 24 oktober 2014
(+ egenrättning 12.00 – ca 13.00)
L21-L22-L41-L42

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad. Skrivtiden är tre timmar. Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p. Den *teoretiska delen* utgörs av uppgifterna 1 och 2 och *beräkningsdelen* utgörs av uppgifterna 3 till 6. Teoretiska delen tillsammans med hemuppgifterna (HT 2014) kan maximalt ge 9 p och beräkningsdelen tillsammans med grupp- & individuella-uppgifter (HT 2014) kan maximalt ge 12 p. För godkänt krävs minst 9 p sammanlagt.
Miniräknare är ej tillåten.

---

(1) Bevisa Gauss' sats:

a) Skriv ner de logiska stegen i beviset i ord **(1 p)**
b) Bevisa satsen med matematiska formler **(2 p)**

---

(2) Bevisa att om ϕ har kontinuerliga andraderivator i området V samt är kontinuerlig i V och S så gäller (sats 12.2):

$$\nabla^2\phi = 0 \;\text{ i V och }\; \phi = 0 \;\text{på S}\; \Rightarrow \; \phi = 0 \;\text{ i V}$$ **(3p)**

V. G. Vänd!

---

(3) Beräkna flödet av vektorfältet **(3 p)**

$$\bar{A} = x\hat{e}_x + xz\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

genom öppen ytan S definierad av

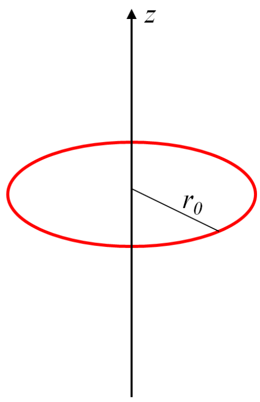
$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y < 2 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y > 0 \end{cases}$$

---

(4) En elektrisk ström I går i en cirkulär spole. Spolen har radien r_0, den har centrum i origo, och ligger i planet $z = 0$.

Biot-Savarts lag lyder:

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$



där:

$d\bar{l}'$ är ett infinitesimalt längdelement längs spolen (kurvan L),
$\bar{r}'$ är en vektor från origo till $d\bar{l}'$,
$\bar{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\bar{B}$).

Beräkna magnetfältet $\bar{B}$ <u>längs *z*-axeln</u> (d.v.s. i $\rho = 0$) genom att utföra följande steg:

(r) Uttryck dessa storheter i ett cylindriskt koordinatsystem (använd $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$):

$d\bar{l}'$ **(0.3p)**
$\bar{r}'$ **(0.3p)**
$\bar{r}$ **(0.3p)**
$d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')$ **(0.3p)**
$|\bar{r} - \bar{r}'|^3$ **(0.3p)**

(s) Förklara med en figur, eller visa matematiskt att:

$\int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi = 0$ **(0.5p)**

(t) Beräkna magnetfältet $\bar{B}$ längs *z*-axeln som produceras av spolströmmen. **(1.0p)**

---

(5) En sfär med radie r_0 har laddningstätheten: $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha}$ $\alpha > 0$.

Utanför sfären är laddningstätheten lika med noll.

(a) Betrakta Poissons ekvation: $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (där ε_0 är en konstant)

- skriv ner Poissons ekvation genom att använda ett lämpligt koordinatsystem. **(0.3p)**
- utnyttja problemets symmetri för att förenkla ekvationen. **(0.5p)**

(b) Använd ekvationen ovan för att beräkna:

- elektrostatiska potentialen ϕ innanför och utanför sfären. **(1.0p)**
- elektriska fältet $\overline{E}$ innanför och utanför sfären. **(1.0p)**

(c) Rita ut potentialen och elektriska fältet innanför och utanför sfären. **(0.2p)**

Tips:

- $\overline{E} = -\nabla \phi$
- $\lim_{r \to \infty} \phi(r) = 0$
- $\overline{E}(r = 0) = 0$
- Vid $r = r_0$ är elektrostatiska potentialen ϕ innanför sfären lika med potentialen utanför sfären.
- Vid $r = r_0$, är elektriska fältet innanför sfären lika med elektriska fältet utanför sfären.

---

(6) Betrakta följande skalärfält i sfäriska koordinater:

$$\phi = r^2 \sin\theta \sin\varphi$$

(a) Beräkna ökningen per längdenhet (d.v.s. riktningsderivatan) av skalärfältet i riktningen $\overline{v} = \hat{e}_r + 2\hat{e}_\varphi$ i punkten P definierad av $r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ **(1.25p)**

(b) Beräkna vinkeln mellan $\overline{v}$ *och* $\hat{e}_\varphi$ **(0.5p)**

(c) Beräkna en riktning, parallell med xy-planet, för vilken skalärfältets ökning per längdenhet är $\sqrt{\frac{5}{2}}$ i punkten P.
(tips: använd kartesiskt koordinatsystem) **(1.25p)**

SOLUTIONS

PROBLEM (3)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \\ y = x^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}$$

$$\overline{r}(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta, \rho^2, \rho\sin\theta\right)$$

$$\theta : 0 \to 2\pi$$

$$\rho : 0 \to \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial\rho} = \left(\cos\theta, 2\rho, \sin\theta\right) \\ \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial\theta} = \left(-\rho\sin\theta, 0, \rho\cos\theta\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta} = \left(2\rho^2\cos\theta, -\rho, 2\rho^2\sin\theta\right) = \overline{n}$$

$but \quad \overline{n}\cdot\hat{e}_y$ must be >0 $\Rightarrow$ the sign must be changed.

$$\overline{A} = \left(\rho\cos\theta, \rho^2\sin\theta\cos\theta, \rho\sin\theta\right)$$

$$\iint_{-s}\overline{A}\cdot d\overline{S} = \iint_{-s}\overline{A}(\overline{r}(\rho,\theta))\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}\right)d\rho d\theta$$

$$= -\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left(2\rho^3 - \rho^3\sin\theta\cos\theta\right)d\rho d\theta = -\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}2\rho^3 d\rho d\theta + \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta =$$

$$-2\pi\left[\frac{\rho^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} + 0 = -4\pi$$

PROBLEM (4)

$$\bar{r} = z\hat{e}_z$$
$$\bar{r}' = r_0\hat{e}_\rho$$
$$d\bar{l}' = r_0 d\varphi\hat{e}_\varphi$$
$$\bar{r} - \bar{r}' = -r_0\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{r_0^2 + z^2}$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = \left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}$$

$$d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}') = zr_0 d\varphi\hat{e}_\rho + r_0^2 d\varphi\hat{e}_z$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi\hat{e}_x + \sin\varphi\hat{e}_y\right) d\varphi = 0$$

$$\bar{B}(\bar{\mathrm{r}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zr_0 d\phi\hat{e}_\rho + r_0^2 d\phi\hat{e}_z}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zr_0\hat{e}_\rho}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} d\phi + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2\hat{e}_z}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} d\phi =$$

$$= \quad 0 \quad + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r_0^2\hat{e}_z}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r_0^2\hat{e}_z}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}} 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{r_0^2}{\left(r_0^2 + z^2\right)^{3/2}}\hat{e}_z$$

PROBLEM (5)

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

inside the sphere:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^{\alpha+2}}{r_0^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad r^2\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\alpha+3}\frac{r^{\alpha+3}}{r_0^{\alpha}} + c \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\alpha+3}\frac{r^{\alpha+1}}{r_0^{\alpha}} + \frac{c}{r^2}$$

$$\left[\bar{E} = -\nabla\phi \quad and \quad \bar{E}(r=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0\right]$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\alpha+3}\frac{r^{\alpha+1}}{r_0^{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{(\alpha+3)(\alpha+2)}\frac{r^{\alpha+2}}{r_0^{\alpha}} + d$$

$$\phi^{in}(r) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{(\alpha+3)(\alpha+2)}\frac{r^{\alpha+2}}{r_0^{\alpha}} + d$$

$$\bar{E}^{in}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\alpha+3}\frac{r^{\alpha+1}}{r_0^{\alpha}}\hat{e}_r$$

outside the sphere:

$$\phi^{out}(r) = -\frac{a}{r}$$
$$\bar{E}^{out}(r) = -\frac{a}{r^2}\hat{e}_r$$

boundary conditions:

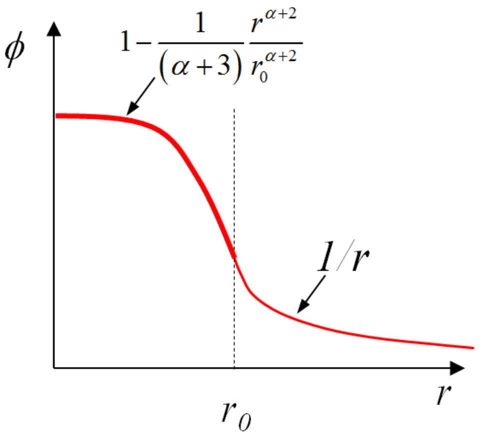
$$\phi^{out}(r_0) = \phi^{in}(r_0) \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r_0^{\,3}}{\alpha+3}$$
$$\bar{E}^{out}(r_0) = \bar{E}^{in}(r_0) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r_0^{\,2}}{\alpha+2}$$

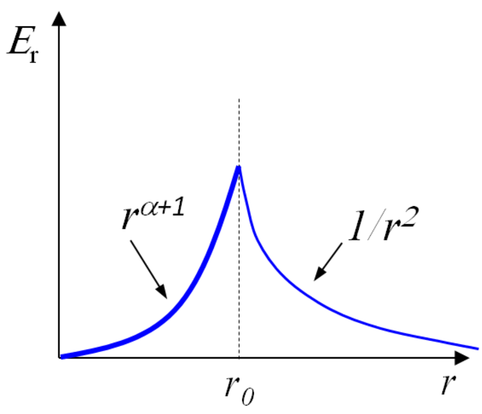
Potential:

$$\phi^{in}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r_0^{\,2}}{\alpha+2}\left(1-\frac{1}{(\alpha+3)}\frac{r^{\alpha+2}}{r_0^{\alpha+2}}\right) \qquad \phi^{out}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r_0^{\,3}}{\alpha+3}\frac{1}{r}$$
$$\bar{E}^{in}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\alpha+3}\frac{r^{\alpha+1}}{r_0^{\alpha}}\hat{e}_r \qquad \bar{E}^{out}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\alpha+3}\frac{r_0^3}{r^2}\hat{e}_r$$

note that: $Q = \int \rho(r)dV = \rho_0 \frac{4\pi r_0^3}{\alpha+3}$

so $\phi^{out}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ *and* $\bar{E}^{out}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$





PROBLEM (6)

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) = 2r\sin\theta\sin\varphi\hat{e}_r + r\cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_\theta + r\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla\phi\big|_P = \sqrt{2}\hat{e}_r + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\big|_P \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \left(\sqrt{2}\hat{e}_r + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_\varphi\right)\cdot\frac{\hat{e}_r + 2\hat{e}_\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}\cdot\hat{e}_\varphi = |\overline{v}||\hat{e}_\varphi|\cos\alpha = \sqrt{5}\cos\alpha \\ \overline{v}\cdot\hat{e}_\varphi = \left(\hat{e}_r + 2\hat{e}_\varphi\right)\cdot\hat{e}_\varphi = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\nabla\phi\big|_P = \sqrt{2}\hat{e}_r + \hat{e}_\varphi = \frac{1}{2}\hat{e}_x + \frac{3}{2}\hat{e}_y \quad \text{(express } \hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi \text{ in the cartesian coordinate system)}$$

$$\nabla\phi\big|_P \cdot \hat{w} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\hat{w}$ must be parallel to the x-y plane $\Rightarrow\ \hat{w} = a\hat{e}_x + b\hat{e}_y$ with $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\phi\big|_P \cdot \hat{w} = \left(\frac{1}{2}\hat{e}_x + \frac{3}{2}\hat{e}_y\right)\cdot\left(a\hat{e}_x + b\hat{e}_y\right) = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b \\ \sqrt{a^2+b^2} = 1 \\ \nabla\phi\big|_P \cdot \hat{w} = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ and a} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \hat{w} = \frac{\hat{e}_x + 3\hat{e}_y}{\sqrt{10}}$$