

LEKTION, VECKA 6

PROBLEM 1

Beräkna flödet

$$\iint_S \frac{r^3 + 1}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{S}$$

genom den slutna ytan S definierad av

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Vektorfältet definieras i ett sfäriskt koordinatsystem.

PROBLEM 2

Beräkna flödet

$$\iint_S \frac{r^2 + 1}{r} \hat{e}_\phi \cdot d\vec{S}$$

genom den slutna ytan S definierad av

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Vektorfältet definieras i ett sfäriskt koordinatsystem.

PROBLEM 3

Beräkna cirkulationen av vektorfältet

$$\vec{A} = \frac{\omega \rho + \omega}{\rho} \hat{e}_\phi$$

Längs den slutna kurvan L som definieras av

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Orienteringen av L i punkten $x = a, y = 0, z = 0$ är $-\hat{e}_y$.

PROBLEM 4

Betrakta följande vektorfält (i cylindriska koordinater):

$$\vec{A} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho} \hat{e}_\varphi + \rho^2 \hat{e}_\rho$$

Beräkna linjeintegralen $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$ där L är en ellips som ligger i xy -planet, med centrum i origo, storradie a längs y -axeln och lillradie b längs x -axeln. I punkten $x = 0, y = a, z = 0$ har L tangentvektor $\hat{e}_x$.

PROBLEM 5

En oändligt lång cylinder med radie R har laddningstätheten

$$\rho_c = \rho_0 \left(1 - \frac{\rho}{R} \right)$$

Antag att potentialen på cylinderytan är V_0 och att elektriska fältet på cylinderaxeln är noll. Beräkna elektriska potentialen V och elektriska fältet $\vec{E}$ innanför och utanför cylindern.

PROBLEM 6

En sfär med radie R har laddningstätheten

$$\rho_c = \rho_0 \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \quad \text{med } \alpha > 0.$$

Utanför sfären är laddningstätheten lika med noll. Antag att $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ och att elektriska fältet i sfärens centrum är noll.

Beräkna elektriska potentialen V och elektriska fältet $\vec{E}$ innanför och utanför sfären.

SVAR

PROBLEM 1 SVAR: $4\pi(1+abc)$

PROBLEM 2 SVAR: 0

PROBLEM 3 SVAR: $-2\pi\omega(a+1)$

PROBLEM 4 SVAR: $-2\pi(1+ab)$

PROBLEM 5

SVAR:

$$V_{in}(\rho) = V_0 + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} R^2 \left(\frac{5}{36} - \frac{\rho^2}{4R^2} + \frac{\rho^3}{9R} \right) +$$

$$V_{out}(\rho) = V_0 - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{6} \ln \frac{\rho}{R}$$

$$\bar{E}_{in}(\rho) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3R} \right) \hat{e}_\rho$$

$$\bar{E}_{out}(\rho) = \frac{1}{6} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{\rho} \hat{e}_\rho$$

PROBLEM 6

SVAR:

$$V_{in}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{\alpha+2} \left(1 - \frac{1}{(\alpha+3)} \frac{r^{\alpha+2}}{R^{\alpha+2}} \right)$$

$$V_{out}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^3}{\alpha+3} \frac{1}{r}$$

$$\bar{E}_{in}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{\alpha+3} \frac{r^{\alpha+1}}{R^\alpha} \hat{e}_r$$

$$\bar{E}_{out}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{\alpha+3} \frac{R^3}{r^2} \hat{e}_r$$

Note that,

$$Q = \int \rho(r) dV = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{\alpha+3}$$

So, we can also write

$$V_{out}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\bar{E}_{out}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$$

So, outside the sphere we get the same expressions of the potential and field produced by a point charge.