

LEKTION, VECKA 4

PROBLEM 1

Beräkna i ett cylindriskt koordinatsystem:

$$(a) \quad \text{grad} \left(\rho^2 \sin \varphi + \frac{z \sin \varphi}{\rho} \right)$$

$$(b) \quad \text{div}(\hat{e}_\rho)$$

$$(c) \quad \text{div}(\hat{e}_\varphi)$$

$$(d) \quad \text{div}(\rho \cos \varphi \hat{e}_\rho + \rho \sin \varphi \hat{e}_\varphi + z^2 \hat{e}_z)$$

$$(e) \quad \text{rot}(\hat{e}_\varphi)$$

PROBLEM 2

Beräkna i ett sfäriskt koordinatsystem:

$$(a) \quad \text{grad}(r^2)$$

$$(b) \quad \text{grad} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)$$

$$(c) \quad \text{div}(\vec{r})$$

$$(d) \quad \text{rot}(r^2 \sin \theta \hat{e}_r + \cos \varphi \hat{e}_\varphi)$$

PROBLEM 3

Beräkna: $\iint_S \hat{e}_\varphi \times \hat{n} dS$ med

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_z \leq 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

PROBLEM 4

(a) Visa att följande integral är oberoende av integrationsvägen:

$$\int_P^Q \left(\frac{1}{r} \hat{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi \right) \cdot d\vec{r}.$$

P och Q är definierade enligt

$$P: (r, \theta, \varphi) = \left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Q: (r, \theta, \varphi) = \left(3, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

Vägen är sådan att den ej skär planet $\varphi = \pi$ eller z -axeln.

(b) Finn linjeintegralens värde.

PROBLEM 5

Betrakta följande vektorfält:

$$\vec{A} = \frac{1}{r^3} (\cos 2\theta \hat{e}_\theta - \sin 2\theta \hat{e}_r)$$

(a) Beräkna $\text{rot} \vec{A}$

(b) Beräkna $\text{div} \vec{A}$

(c) Har fältet potential? Motivera ditt svar och finn en potential om det är möjligt.

PROBLEM 6

Beräkna $\nabla^2 \hat{e}_\varphi$ där $\hat{e}_\varphi$ är en basvektor i cylindriska koordinater.

Använd följande samband: $\nabla^2 \hat{e}_\varphi = \text{grad}(\text{div}(\hat{e}_\varphi)) - \text{rot}(\text{rot} \hat{e}_\varphi)$.

SVAR

PROBLEM 1

SVAR:

$$(a): \left(2\rho \sin \varphi - \frac{z \sin \varphi}{\rho^2} \right) \hat{e}_\rho + \left(\rho \cos \varphi + \frac{z \cos \varphi}{\rho^2} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{\sin \varphi}{\rho} \hat{e}_z$$

$$(b): \frac{1}{\rho}$$

$$(c): 0$$

$$(d): 2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2z = 3 \cos \varphi + 2z$$

$$(e): \frac{1}{\rho} \hat{e}_z$$

PROBLEM 2

SVAR:

$$(a): 2\bar{r}$$

$$(b): -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r - \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta$$

$$(c): 3$$

$$(d): \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r \sin \theta} \hat{e}_r - \frac{\cos \varphi}{r} \hat{e}_\theta - r \cos \theta \hat{e}_\varphi$$

PROBLEM 3

$$\text{SVAR: } -\frac{1}{2} \hat{e}_x - \frac{1}{2} \hat{e}_y + \frac{\pi^2}{8} \hat{e}_z$$

PROBLEM 4

$$\text{SVAR: } 3 + \pi$$

PROBLEM 5

SVAR:

$$(a) \quad \bar{0}$$

$$(b) \quad \frac{\cos 3\theta}{r^4 \sin \theta}$$

$$(c) \quad \phi = \frac{\sin 2\theta}{2r^2} + c$$

PROBLEM 6

$$\text{SVAR: } -\frac{1}{\rho^2} \hat{e}_\varphi$$