

LEKTION, VECKA 5

PROBLEM 1

Visa med nabläräkning:

$$(a) \quad (\vec{B} \cdot \nabla)(\phi \vec{A}) = \vec{A}(\vec{B} \cdot \nabla \phi) + \phi(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$(b) \quad (\vec{B} \cdot \nabla)(\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{B} \times (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

PROBLEM 2

Visa att:

$$(a) \quad \nabla r = \hat{e}_r$$

$$(b) \quad \nabla \cdot \vec{r} = 3$$

$$(b) \quad \nabla \times \vec{r} = 0$$

kom ihåg: $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ och $\vec{r} = r\hat{e}_r$
 $r = |\vec{r}|$

PROBLEM 3

Visa med index räkning att:

$$(a) \quad \nabla \cdot (\vec{r} \times \nabla \phi) = 0$$

$$(b) \quad \nabla \cdot (\nabla \psi \times \nabla \phi) = 0$$

PROBLEM 4

Visa att ($\vec{a}$ och $\vec{b}$ är konstanta vektorer)

$$(a) \quad \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$$

$$(b) \quad \nabla \cdot (\phi(r) \vec{r}) = 3\phi(r) + r \frac{d\phi}{dr}$$

$$(c) \quad \nabla \cdot ((\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{r}) = -2\vec{a} \cdot \vec{r}$$

$$(d) \quad \nabla \times (\phi(r) \vec{r}) = \vec{0}$$

PROBLEM 5

Visa att (med indexräkning eller nabläräkning):

$$\nabla \times (\vec{r} \times \nabla \phi) + \nabla (\vec{r} \cdot \nabla \phi) = \vec{r} \nabla^2 \phi - \nabla \phi$$

PROBLEM 6

Betrakta vektorfältet $\vec{A} = \omega \rho \hat{e}_\varphi$ (i cylindriska koordinater) och sfären S (radie R och centrum i origo). Visa att

$$\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = -\frac{8}{3} \pi R^3 \omega \hat{e}_z$$

PROBLEM 7

Betrakta vektorfältet $\vec{A} = -\omega z \hat{e}_y + \omega y \hat{e}_z$ och kurvan L . L är en ellips som ligger i xy -planet med centrum i origo, radier a och b och som genomlöps i negativ led runt z -axeln.

Visa att:

$$\oint_L \vec{A} \times d\vec{r} = \pi ab \omega \hat{e}_y$$

PROBLEM 8

Det elektriska fältet $\vec{E}$ har den skalära potentialen Φ och det magnetiska fältet $\vec{B}$ har vektorpotentialen $\vec{A}$.

Man kan visa att

$$\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{B} dV = 0$$

om något av följande villkor gäller på den slutna ytan S som omger volymen V :

- (a) $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 = \text{konstant}$.
- (b) $\vec{E}$ är parallel med normalen $\hat{n}$ överallt på S .
- (c) $\vec{B}$ är vinkelrät mot $\hat{n}$ överallt på S .

Bevisa dessa påståenden

PROBLEM 9

Betrakta ytan S och vektorn $\vec{v}$. Ytan S är en sfär med radie $R = 1$ och centrum i punkten $\vec{b}$ och vektorn $\vec{v}$ är konstant.

Visa att:

$$\oint_S [d\vec{S} \times (\vec{v} \times \vec{r})] = \frac{8}{3} \pi \vec{v}$$